REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA
XXX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA
Primera fase

Primera sesión (26 de noviembre de 1993)

Problema 1

Demostrar que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, las fracciones

$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{2n+1}, \quad \frac{2n+1}{2n^2+2n}$$

son irreducibles.

Problema 2

Dada una esfera de radio R, se construye un cono de revolución cuya base es un círculo máximo de la esfera, con vértice exterior a la misma. Hallar el radio de la circunferencia menor según la cual se cortan la esfera y el cono, sabiendo que el volumen de éste es la mitad del volumen de la esfera dada.

Problema 3

El valor absoluto de un número real a se define así:

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ si } a < 0$$

Por su parte, la parte entera de a, $[a]$, es el mayor entero menor o igual que a.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x.|x| + y.|y| &= 1 \\ [x] + [y] &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Problema 4

Sea AD la bisectriz interior del triángulo ABC. Sean E, el punto simétrico de D respecto del punto medio de BC, y F el punto de BC tal que $\angle BAF = \angle EAC$.
Demostrar que

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^3}{b^3}$$

REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA
XXX OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA
Primera fase
Segunda sesión (27 de noviembre de 1993)

Problema 5

Determinar todos los números naturales n tales que el número

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

tiene exactamente tres divisores primos.

Problema 6

Se traza una elipse tomando como eje mayor el mayor de los lados de un rectángulo dado, de manera que la elipse pase por el punto de intersección de las diagonales.
Pruébese que si se une un punto de la elipse, exterior a dicho rectángulo, con los extremos del lado opuesto, las rectas así determinadas dividen al eje mayor en segmentos que están en progresión geométrica.

Problema 7

Sea a un número real dado. Calcular los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_2\\
x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_n\\
x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_1.
\end{aligned}$$

Problema 8 (El mito de Sísifo)

Hay 1001 escalones, con rocas en algunos de ellos (no más de una en cada escalón). Sísifo debe coger una roca y subirla, uno o más escalones, hasta el primer escalón que encuentre vacío. Entonces Hades, su oponente, coge una roca y la baja al escalón inmediatamente inferior, siempre que éste esté vacío.
Inicialmente hay 500 rocas en los primeros 500 escalones. Sísifo y Hades mueven las rocas alternativamente, haciendo Sísifo el movimiento inicial.
Sísifo debe colocar una roca en el último escalón.
¿Puede impedirlo Hades?