

XXXI OLIMPIADA MATEMATICA ESPANOLA  
PRIMERA FASE

PRIMERA SESION  
2 DE DICIEMBRE DE 1994

Problema 1

Sean  $a, b, c$  tres números reales distintos y  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales. Si se sabe que

- 1)  $P(x)$  da resto  $a$  cuando se divide por  $x - a$ ;
- 2)  $P(x)$  da resto  $b$  cuando se divide por  $x - b$ ;
- 3)  $P(x)$  da resto  $c$  cuando se divide por  $x - c$ ,

encontrar el resto de la división de  $P(x)$  por  $(x-a)(x-b)(x-c)$ .

Problema 2

Demostrar que, si

$$\left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left( y + \sqrt{y^2 + 1} \right) = 1,$$

entonces  $x + y = 0$ .

Problema 3

Los cuadrados de los lados de un triángulo  $ABC$  son proporcionales a los números  $1, 2, 3$ .

- a) Demostrar que los ángulos formados por las medianas son iguales a los del triángulo  $ABC$ .
- b) Demostrar que el triángulo cuyos lados son las medianas de  $ABC$  es semejante al triángulo  $ABC$ .

Problema 4

Determinar el menor número natural  $m$  tal que, para todo número natural  $n \geq m$ , se verifique  $n = 5a + 11b$ , siendo  $a$  y  $b$  enteros mayores o iguales que  $0$ .

XXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA  
PRIMERA FASE

SEGUNDA SESION  
3 DE DICIEMBRE DE 1994

Problema 5

Un subconjunto  $A \subseteq M = \{1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$  es majo si tiene la siguiente propiedad:

" Si  $2k \in A$ , entonces  $2k-1 \in A$  y  $2k+1 \in A$  "

(El conjunto vacío y  $M$  son majos ).

¿Cuántos subconjuntos majos tiene  $M$ ?

Problema 6

Se consideran las parábolas de ecuaciones

$$y = cx^2 + d \quad (c > 0, d < 0)$$

$$x = ay^2 + b \quad (a > 0, b < 0)$$

que se cortan en cuatro puntos. Demostrar que esos cuatro puntos están en una misma circunferencia.

Problema 7

Demstrar que existe un polinomio  $P(x)$ , con coeficientes enteros, tal que sen  $1^\circ$  sea solución de la ecuación  $P(x) = 0$ .

Problema 8

Un avión de la compañía "Air Disaster" debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de  $m+n$  escalas. En cada escala el avión deberá cargar o descargar una tonelada de cierta mercancía, realizándose cargas en  $m$  de las escalas y descargas en las  $n$  restantes. En la compañía nadie ha observado que el avión no soporta una carga mayor de  $k$  toneladas ( $n < k < m+n$ ), y las escalas de carga y descarga se han distribuido al azar. Sabiendo que el avión parte con  $n$  toneladas de mercancías, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a su destino?