

XXXII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

I FASE

Día 1 de diciembre de 1995

Problema 1. La asociación "Amigos de las Matemáticas" invita, todos los años, a todos sus afiliados a su congreso anual. Este año, exactamente el $27,181818\dots\%$ de los asistentes eran mujeres; exactamente el $55,5555\dots\%$ eran personas mayores de 30 años, y el 37% llevaba algún libro de Matemáticas. Sabiendo que el número de afiliados no es mayor que 15.000, ¿podrías calcular el número de asistentes al congreso?

Problema 2. En el triángulo ABC, rectángulo en A, se traza la altura AD (D pertenece a BC). Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente. Sea P el punto de intersección de AD y MN. Demostrar que $AP = r$, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.

Problema 3. Dos jugadores juegan en un tablero infinito de casillas 1×1 . El jugador A elige una casilla y pone en ella un 0. A continuación, el jugador B elige otra casilla y pone en ella una x. Juegan así, hasta que uno de los jugadores llena una fila o una columna de 5 casillas consecutivas, en cuyo caso gana el juego. Si ningún jugador puede hacer ésto, hay empate. Demostrar que el jugador B puede impedir que el jugador A gane el juego.

Problema 4. Sean $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, $b \in (0, \frac{\pi}{2})$ y $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ las raíces de las ecuaciones
 $\cos x = x$; $\sin(\cos x) = x$; $\cos(\sin x) = x$
respectivamente.
Ordenar de menor a mayor los tres números a, b, c, justificando la respuesta.

XXXII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

I FASE

Día 2 de diciembre de 1995

Problema 5. Encontrar dos números ^{naturales} ~~enteros~~, k y n , tales que

$$0 < \frac{15}{17} - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{1995}$$

¿Cuál es el mínimo valor de n para el que existe k con esa propiedad?

Problema 6. Se da un cono de revolución cuyo ángulo en el vértice es de 60° . En este cono se van introduciendo esferas, de forma que la primera quede tangente al cono; la segunda, tangente al cono y a la primera esfera; la tercera, tangente al cono y a la segunda esfera; y así sucesivamente. El radio de la primera esfera es r_1 .

Se pide:

- El radio de la esfera introducida en n -ésimo lugar.
- El volumen comprendido entre el cono y las esferas introducidas en los lugares n -ésimo y n -ésimo más uno.

Problema 7. Un torneo de tenis se juega por la modalidad de eliminatorias sucesivas: los participantes se emparejan aleatoriamente y los vencedores de los encuentros pasan a la siguiente eliminatoria (Si el número de jugadores es impar, uno de ellos pasa directamente a la siguiente eliminatoria). Este mecanismo se repite tantas veces como sea necesario hasta llegar a la final, en la que se enfrentan los dos únicos participantes restantes, resultando un único vencedor.

¿Cuántos partidos se jugarán en total en el torneo?

Si se supone que todos los jugadores son igualmente hábiles, y, por lo tanto, cualquiera de los participantes en un encuentro tiene la misma probabilidad de ganar, ¿cuál es la probabilidad de que dos jugadores en particular, A y B , inscritos, se enfrenten en algún partido?

Problema 8. Sea A un conjunto de 8 elementos. Hallar el máximo número de subconjuntos de A , de tres elementos cada uno, tales que la intersección de dos cualesquiera de esos subconjuntos NO es un conjunto de 2 elementos.