

XXXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Primera Fase

PRIMERA SESION (29 de noviembre de 1996)

PROBLEMA 1

Demostrar que todo número complejo no nulo se puede escribir como suma de otros dos cuya diferencia y cuyo cociente sean imaginarios puros.

PROBLEMA 2

Se considera una circunferencia de centro O, radio r y un punto P exterior. Se trazan cuerdas AB paralelas a OP.

a) Demostrar que $PA^2 + PB^2$ es constante.

b) Hallar la longitud de la cuerda AB que hace máxima el área del triángulo ABP.

PROBLEMA 3

Seis músicos participan en un festival de música. En cada concierto, algunos de esos músicos tocan y los demás escuchan. ¿Cuál es el mínimo número de conciertos necesario para que cada músico escuche a todos los demás?

PROBLEMA 4

La suma de dos de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 503x^2 + (a + 4)x - a = 0$$

es igual a 4. Determinar el valor de a.

XXXIII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA

Primera Fase

SEGUNDA SESION (30 de noviembre de 1996)

PROBLEMA 5

Si a, b, c son números reales positivos, demostrar la desigualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 3(b-c)(a-b).$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

PROBLEMA 6

Encontrar, razonadamente, todos los números naturales n tales que n^2 tenga solamente cifras impares.

PROBLEMA 7

En el triángulo rectángulo ABC (rectángulo en A), AD es la altura. Las bisectrices de $\widehat{ABD}$ y $\widehat{ADB}$ se cortan en I_1 , mientras que las bisectrices de $\widehat{ACD}$ y $\widehat{ADC}$ se cortan en I_2 . Calcular los ángulos agudos del triángulo ABC , sabiendo que la suma de las distancias de I_1 e I_2 a la altura AD es igual a $BC/4$.

PROBLEMA 8

Para cada número real x , representamos con $[x]$ el mayor entero que es menor o igual que x . Definimos

$$q(n) = \left\lceil \frac{n}{[\sqrt{n}]} \right\rceil, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Forma una tabla que dé los valores de $q(n)$ para $1 \leq n \leq 25$.

Examinando la tabla, conjetura cuáles serán los valores de n para los cuales $q(n) > q(n+1)$.

b) Demuestra la conjetura, es decir, determina razonadamente todos los enteros positivos n tales que $q(n) > q(n+1)$.