OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local 2002

Viernes 18 de enero de 2002

Sesión de Mañana

1. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.

---

2. En el triángulo ABC, la bisectriz trazada desde A divide al lado opuesto en dos segmentos, de los que conocemos uno: $BT = 572$ m. Si dicha bisectriz corta a la mediana BM en los segmentos $BD = 200$ m y $DM = 350$ m, calcula el lado a de dicho triángulo y plantea una ecuación con incógnita c para obtener el lado c (no hace falta que lo calcules explícitamente).

---

3. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

Viernes 18 de enero de 2002

Sesión de Tarde

4. En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

---

5. La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.

---

6. Escribo en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.

a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.
b) ¿Es posible que alguno de los catorce que he escrito no sea el 0?

Sábado 19 de enero de 2002

Sesión de Mañana

7. En el triángulo acutángulo ABC, AH, AD y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A, estando H, D y M en el lado BC. Si las longitudes de AB, AC y MD son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH.

---

8. Se sabe que el número de soluciones reales del sistema

$$(y^2 + 6)(x - 1) = y\,(x^2 + 1)$$
$$(x^2 + 6)(y - 1) = x\,(y^2 + 1)$$

es finito. Prueba que este sistema tiene un número par de soluciones reales.
(Nota: Decimos que la solución (x_0, y_0) es real cuando x_0 e y_0 son números reales)

---

9. Considera 7 puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.

Soluciones en formato Microsoft Word 2000 comprimido .zip (31 Kb)