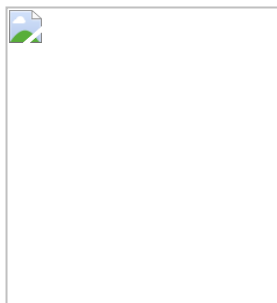


OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA



Fase local 2004

Primera sesión
Mañana del viernes 15 de enero de 2004

Problema 1.

Consideremos los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ (x es la variable, a, b, c, A, B, C son parámetros). Sabemos que las tres raíces de P son positivas y que las raíces de Q son los números inversos de las raíces de P . Probad que $a \cdot A > 9$,

$$b \cdot B > 9$$

Problema 2.

En un tablero de damas (8 x 8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?

Problema 3.

¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?.

Segunda sesión
Tarde del viernes 15 de enero de 2004

Problema 4.

Encontrad todas las funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n .

● **Problema 5.**

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.

● **Problema 6.**

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Primera sesión
Mañana del sábado 16 de enero de 2004

● **Problema 1.**

Demostrad que si $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$,

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

● **Problema 2.**

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P , las de Q son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q .

● **Problema 3.**

Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

Segunda sesión
Tarde del sábado 16 de enero de 2004

● **Problema 4.**

Calculad todos los posibles valores de $f(2004)$, donde $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función que cumple:

- $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo par de números naturales m, n .
- $f(n) \leq n^2$ para todo número natural n .
- $f(1002) \geq 1003969$

● **Problema 5.**

¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor?. Si existe, determinad sus medidas.

● **Problema 6.**

Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004} .

[Soluciones en formato Microsoft Word 2000 comprimido .zip \(180 Kb\)](#)

[|Página principal|](#) [|Info Alumnos|](#) [|Info Profesores|](#) [|Otros sitios de interés|](#) [|Problemas|](#)

Copyright © C. Sánchez-Rubio

Actualizado 21 Enero 2004

