OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local 2004

Primera sesión
Mañana del viernes 15 de enero de 2004

Problema 1.

Consideremos los polinomios $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $Q(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ (*x* es la variable, *a, b*, *c*, *A, B, C* son parámetros). Sabemos que las tres raíces de *P* son positivas y que las raíces de *Q* son los números inversos de las raíces de *P*. Probad que $a\cdot A>9$, $b\cdot B>9$.

Problema 2.

En un tablero de damas (8 x 8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?

Problema 3.

¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?.

Segunda sesión
Tarde del viernes 15 de enero de 2004

Problema 4.

Encontrad todas las funciones $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tales que $f\left(f\left(n\right)\right)=n+2$ para todo número natural *n*.

Problema 5.

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Problema 6.

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Primera sesión
Mañana del sábado 16 de enero de 2004

Problema 1.

Demostrad que si $-1<x<1$,$-1<y<1$,

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\le\frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

Problema 2.

Consideramos los polinomios $P\left(x\right)=x^3+Ax^2+Bx+C,\ Q\left(x\right)=3x^2+2Ax+B$ (*x* es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si *a, b, c* son las tres raíces de *P*, las de *Q* son $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios *P*, *Q*.

Problema 3.

Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

Segunda sesión
Tarde del sábado 16 de enero de 2004

Problema 4.

Calculad todos los posibles valores de $f(2004)$, donde $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ es una función que cumple:

- $f(nm)=f(n)f(m)$ para todo par de números naturales *m*, *n*.
- $f(n)\leq n^2$ para todo número natural *n*.
- $f(1002)\geq 1003969$

Problema 5.

¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor?. Si existe, determinad sus medidas.

Problema 6.

Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004}.

Soluciones en formato Microsoft Word 2000 comprimido .zip (180 Kb)

Actualizado 21 Enero 2004