Problema 1

Consideremos los polinomios $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $Q(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ (x es la variable, a, b, c, A, B, C son parámetros). Sabemos que las tres raíces de P son positivas y que las raíces de Q son los números inversos de las raíces de P. Probad que $a \cdot A > 9$, $b \cdot B > 9$.

Solución:

Denotamos por x_1, x_2, x_3 las raíces de P. Las raíces de Q son $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$. Utilizamos las fórmulas de Cardano para conseguir

$$a=-(x_1+x_2+x_3); \quad A=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right);$$

$$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3; \quad B=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}.$$

Ahora, ambas desigualdades son del mismo tipo. Basta probar que, si y_1, y_2, y_3 son números positivos, se tiene que $(y_1+y_2+y_3)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right) \geq 9$. Pero

$$(y_1+y_2+y_3)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}\right)=3+\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}\right)+\left(\frac{y_1}{y_3}+\frac{y_3}{y_1}\right)+\left(\frac{y_2}{y_3}+\frac{y_3}{y_2}\right).$$

Así pues, basta probar que si s y t son números positivos, $\frac{s}{t}+\frac{t}{s} \geq 2$. Finalmente,

$$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}-2=\frac{s^2+t^2-2st}{st}=\frac{(s-t)^2}{st} \geq 0.$$

Problema 2

En un tablero de damas (8 x 8), colocamos las 24 fichas del juego de modo que llenen las 3 filas de arriba. Podemos cambiar la posición de las fichas según el siguiente criterio: una ficha puede saltar por encima de otra a un hueco libre, ya sea horizontal (a izquierda o derecha), vertical (hacia arriba o hacia abajo) o diagonalmente. ¿Podemos lograr colocar todas las fichas en las 3 filas de abajo?

Solución:

No podemos lograrlo:
Clasificamos (o coloreamos) las casillas del tablero en cuatro tipos, según la paridad de la fila y la columna que ocupan. Cada ficha se mueve siempre por el mismo tipo de casilla. Pero el número de casillas de cada tipo que están ocupadas en las posiciones inicial y final esdistinto:
Denotamos *II, PI, IP, PP*, los cuatro tipos de casillas, donde *P* indica paridad, *I* imparidad, la primera entrada alude a la fila y la segunda a la columna. En la posición incial las ficha ocupan 8 casillas de tipo *II*, 8 de tipo *PI*, 4 de tipo *IP* y 4 de tipo *PP*.
En la pretendida posición final ocupan 4 casillas de tipo *II*, 4 de tipo *PI*, 8 de tipo *IP* y 8 de tipo *PP*.

Problema 3.

¿Podemos trazar 2003 segmentos en el plano de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros tres?.
Solución.

No es posible:
Llamamos N al número de cortes. Si sumamos, desde 1 hasta 2003, el número de segmentos que se cortan con uno dado, cada corte locontamos dos veces. Por tanto ontenemos el número $2N$.
Si la hipótesis del enunciado se cumple, se tiene $2003 \cdot 3 = 2N$. Pero $2003 \cdot 3$ es impar y $2N$ es par, algo absurdo.

Problema 4 - 1

Encontrad todas las funciones f:N→N tales que $f\left(f\left(n\right)\right)=n+2$ para todo número natural n.

Solución:
Sea f una función que cumple las condiciones del enunciado.
Sea $f(1) = a$. Reiterando obtenemos $f\left(a\right)=3, f\left(3\right)=a+2,\ldots, f\left(n\right)=n+a-1$ si n es impar.
Sea $f(2) = b$. De igual manera, $f\left(b\right)=4, f\left(n\right)=n+b-2$ si n es par.
De hecho, las condiciones $f\left(a\right)=3, f\left(b\right)=4, f\left(n\right)=n+a-1$ si n es impar, $f\left(n\right)=n+b-2$ si n es par, son necesarias y suficientes para que se cumpla la condición dada en el enunciado.
Para proseguir, debemos distinguir si a y b son pares o impares.
Si a es impar, $3=f\left(a\right)=2a-1$. Luego $a = 2$, hecho contradictorio.
Si b es par, $4=f\left(b\right)=2b-2$. Lugo $b = 3$, hecho contradictorio.
Así, a es par y b impar. Se tiene $3=f\left(a\right)=a+b-2$, $4=f\left(b\right)=a+b-1$. En ambos casos, obtenemos $a + b = 5$.
Nuevamente las cinco condiciones $f\left(n\right)=n+a-1$ si n es impar, $f\left(n\right)=n+b-2$ si n es par, a es par, b es impar, $a + b = 5$ son necesarias y suficientes para que f cumpla la condición dada.
Las únicas posibilidades son, o bien $a = 2$, $b = 3$; $a = 4$, $b = 1$. en un caso obtenemos

$$f\left(n\right)=n+1 \text{ para todo número natural } n.$$

En el otro,

$$f\left(n\right)=\begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar;} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

Problema 5-2.

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje, Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Solución.
Sean A, B, C los vértices del triángulo. Denotamos, respectivamente, x, y, z las distancias de los vértices al origen de coordenadas; y, también respectivamente, a, b, c las longitudes de los lados opuestos a los vértices.

Basta probar que uno de los ángulos es agudo. Probaremos que $\cos\hat{A}>0$. Por el teorema del coseno $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$. Luego debemos demostrar que $a^2<b^2+c^2$.
Gracias al teorema de Pitágoras, se tiene que $a^2=y^2+z^2, b^2=x^2+y^2, c^2=x^2+y^2$.
Por tanto

$$b^2+c^2=2x^2+y^2+z^2>y^2+z^2=a^2.$$

Problema 6 – 3.

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Solución.

Hay que rellenar 3 apuestas:
En 14 partidos, hay un resultado (1, X o 2) que se repite al menos 5 veces (en caso contario, el número de partidos sería menor o igual qie 4·3 = 12, pero 14 > 12). Hacemos las tres apuestas que siguen: todo 1, todo X, todo 2. En una de ellas tenemos al menos 5 aciertos.
Por otra parte, si hacemos 2 apuestas, es posible que no obtengamos ningún acierto. Para cada partido hacemos uno o dos pronósticos distintos y puede suceder el tercero.

Problema 1 - 4

Demostrad que si $-1 < x < 1, -1 < y < 1$,

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

Solución.

Si *x*, *y* tienen signos opuestos, se tiene $|x-y| = |x|+|y|, |1-xy| = 1-xy = 1+|xy|$.
Así pues, la desigualdad es, realmente, una igualdad.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (*x, y*), se cumple para el par opuesto (*-x,-y*). Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x, y \ge 0$.
Si la desigualdad se cumple para un par de números (*x, y*), se cumple para el par simétrico (*y, x*).
Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \le y \le x$.
En este caso, $x-y \ge 0, 1-xy > 0, x \ge 0, y \ge 0, xy \ge 0$, y la desigualdad que debemos probar queda

$$(x-y)(1+xy) \le (x+y)(1-xy).$$

Si expandimos los términos, esta desigualdad es la misma que

$$x - y + x^2y - xy^2 \le x + y - x^2y - xy^2$$

Si simplificamos, obtenemos la desigualdad equivalente

$$2x^2y \le 2y$$

que, puesto que $x^2 \le 1, y \ge 0$, escierta.

Problema 2 - 5.

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si *a, b, c* son las tres raíces de *P*, las de *Q* son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios *P*, *Q*.

Solución.
Q es la derivada de *P*. Por tanto,

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c), Q(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)$$

Sea $d = \frac{a+b}{2}$, punto medio del segmento que une *a* con *b*. Se tiene que $d-a = d-b = \frac{a-b}{2}$.

El valor de Q en d es

$$Q(d)=\frac{b-a}{2}\frac{a-b}{2}+\frac{b-a}{2}(d-c)+\frac{a-b}{2}(d-c)=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Sea $e=\dfrac{b+c}{2}$. Si cambiamos los papeles de a, b por los de b, c la igualdad anterior se transforma en

$$Q(e)=-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Por tanto d y e son raíces de Q si y sólo si $-\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2=-\left(\dfrac{c-b}{2}\right)^2=0$: osea, si y sólo si $a=b=c$.

Ha de ser $P(x)=(x-a)^3, Q(x)=3(x-a)^2$ para un cierto parámetro a.

Problema 3 - 6

Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

Solución.

No es posible escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos:

Tenemos que, si a es entero, $a^2\equiv\begin{cases}0\\1\end{cases}(\text{mod } 4)$. Luego si a y b son enteros, $a^2+b^2\equiv\begin{cases}0\\1\\4\end{cases}\ (\text{mod } 4)$.

Pero $2003\equiv 3\ (\text{mod } 4)$.

Problema 4.

Calculad todos los posibles valores de $f(2004)$, donde $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ es una función que cumple:

- $f(nm)=f(n)f(m)$ para todo par de números naturales m, n.
- $f(n)\le n^2$ para todo número natural n.
- $f(1002)\ge 1003969$

Solución.
Sea f una función que cumple las condiciones del enunciado.
Descomponemos 1002 y 2004 en factores primos. Se tiene que

$$1002=2\cdot 3\cdot 167;\ \ 2004=2^2\cdot 3\cdot 167$$

Si $f(2)\le 2^2-1$, obtenemos que

$$f(1002)=f(2)f(3)f(167)\le(2^2-1)3^2\cdot 167^2=(2\cdot 3\cdot 167)^2-(3\cdot 167)^2=1002^2-(3\cdot 167)^2$$

Si $f(3)\le 3^2-1$, obtenemos que

$$f(1002)\le 2^2\cdot(3^2-1)\cdot 167^2=(2\cdot 3\cdot 167)^2-(2\cdot 167)^2=1002^2-(2\cdot 167)^2.$$

Si $f(167)\le 167^2-1$, obtenemos que

$$f(1002)\le 2^2\cdot 3^2(167^2-1)=(2\cdot 3\cdot 167)^2-(2\cdot 3)^2=1002^2-(2\cdot 3)^2.$$

En los tres casos anteriores, la menor cantidad que restamos a 1002^2 es $(2 \cdot 3)^2$. Por tanto, en cualquiera de los tres casos $f(1002) \le 1002^2 - (2 \cdot 3)^2 = 1002^2 - 36 = 1003986$, que contradice las condiciones de *f*.
Así pues, $f(2) = 2^2$, $f(3) = 3^2$, $f(167) = 167^2$.
Por tanto $f(2004) = f(2)^2 f(3) f(167) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 167^2 = 2004^2$

Por último, notamos que, al menos, hay una función que cumple las condiciones del enunciado: la función f:N→N definida por $f(n) = n^2$ lo hace.
Así pues, el único valor posible es 20042 = 4016016.

Problema 5.

¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor?. Si existe, determinad sus medidas.

Solución.
Notamos que el triángulo debe ser acutángulo. Si *a*, *b*, *c* son sus lados, hay que probar, gracias al teorema del coseno, que $a^2 + b^2 > c^2, a^2 + c^2 > b^2, b^2 + c^2 > a^2$. Si tomamos $a \le b \le c$, basta probar $a^2 + b^2 > c^2$. Sea $a = x-1, b = x, c = x+1$.Esta desigualdad equivale a $0 < x^2 + 4x + 1$.
Ahora, gracias al teorema del seno, el ángulo es más pequeño cuanto más pequeño sea el lado opuesto. Así, el ángulo opuesto a *a* es α, y el opuesto a *c* es 2α.. El opuesto a *b* será $\pi - 3\alpha$, y ha de ser $\alpha \le \pi - 3\alpha \le 2\alpha$; o sea $\frac{\pi}{5} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$.
Si plantamos el teorema del seno, obtenemos

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{sen 2\alpha}{sen\alpha} = 2\cos\alpha; \frac{x}{x-1} = \frac{sen 3\alpha}{sen\alpha} = 4\cos^2\alpha - 1$$

Si eliminamos el ángulo, obtenemos

$$\frac{x}{x-1} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1$$

Esta expresión simplificada, da $x = 5$. También obtenemos que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.
O sea que, si el triángulo existe, sus dimensiones son 4, 5, 6. Para que exista, el ángulo α debe cumplir las condiciones $\cos\frac{\pi}{4} \le \cos\alpha \le \cos\frac{\pi}{5}$. La primera desigualdad es $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{3}{4}$,que equivale, elevando al cuadrado y quitando denominadores, a 16 < 18. La segunda es $\frac{3}{4} \le \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, que equivale, del mismo modo que antes a 4 < 5.
Así pues, el triángulo existe y sus lados miden 4, 5, 6.

Problema 6.

Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004}.

Tenemos que $3^2 = 9 = 10 - 1$. Gracias a ello, la fórmula del binomio de Newton nos permite simplificar los cálculos:

$$3^{2004} = (10-1)^{2002} \equiv -\binom{1002}{3}10^3 + \binom{1002}{2}10^2 - 1002 \cdot 10 + 1$$

$$\equiv \frac{1002}{6} \cdot 1001 \cdot 1000 \cdot 10^3 + \frac{1002}{2} \cdot 1001 \cdot 10^2 - 1003 \cdot 10 + 1$$

$$\equiv (500+1)(1000+1) \cdot 100 - (1000+2) \cdot 10 + 1 \equiv 100 - 20 + 1 \pmod{10^4}$$

Las últimas cuatro cifras son 0081.