OLIMPIADA MATEMÁTICA

ESPAÑOLA

Fase local 2005

Viernes 21 de enero de 2005
Sesión de Mañana

1. Sean *a, b, c* números reales no nulos y distintos. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$.

---

2. Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados $AMCD$ y $BEHM$ en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados, probar que:

1. los puntos B, N y C están alineados.
2. el punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

---

3. Sean x, y, z números reales positivos.

1. Si $x+y+z \geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 3$?
2. Si $x+y+z \leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$?

Viernes 21 de enero de 2005
Sesión de Tarde

4. Se considera un triángulo ABC con Ð$BAC = 45º$ y Ð$ACB = 30º$.
Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que Ð$AMB = 45º$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

---

5. Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.
Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca.
Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.
Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

---

6. Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

Sábado 22 de enero de 2005
Sesión de Mañana

1. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Probar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

---

2. En el interior de un cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE. Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC. Se pide demostrar que:

a) el triángulo CEF es equilátero.
b) el triángulo DEF es rectángulo e isósceles.
c) el triángulo BDF es isósceles.
d) el triángulo PDF es equilátero.

---

3. Encontrar todas las funciones $f : \Re \to \Re$ tales que

$$x^2 \cdot f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4.$$

Sábado 22 de enero de 2005
Sesión de tarde

4. Un grupo de chicos y chicas han comido en un restaurante en el que sólo se sirven pizzas cortadas en 12 raciones. Cada chico comió 6 o 7 raciones y cada chica 2 o 3 raciones.
Se sabe que 4 pizzas no fueron suficientes y que con 5 pizzas hubo de sobra. Calcular el número de chicos y de chicas del grupo.

---

5. Demostrar que la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$$

posee infinitas soluciones en números enteros.

---

6. En un tablero de ajedrez 10×10 se colocan 41 torres. Probar que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.

Soluciones en formato Microsoft Word 2000 comprimido .zip (92 Kb)

Actualizado 25 Enero 2005