VIERNES MAÑANA – 1ª SESIÓN

Problema 1

Sean a, b, c números reales no nulos y $a \neq b$. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$.

Solución:

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$ y x_1, x_3 las de $x^2 + bx + ca = 0$.

La solución común x_1 verifica la ecuación $x^2 + ax + bc - (x^2 + bx + ca) = 0$, de donde resulta $(a-b)x_1 = (a-b)c$ y $x_1 = c$.

Se sigue que $x_2 = b$ y $x_3 = a$, con lo que x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0. \qquad (1)$$

Pues $x_1 = c$ es raíz de $x^2 + ax + bc = 0$, tenemos $c^2 + ac + bc = 0$, de donde $a + b + c = 0$ y $c = -a - b$.

Sustituimos este valor de $-a-b$ en (1) y hemos terminado.

Problema 2

Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados $AMCD$ y $BEHM$ en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados, probar que:

1. los puntos B, N y C están alineados.
2. el punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

Solución:

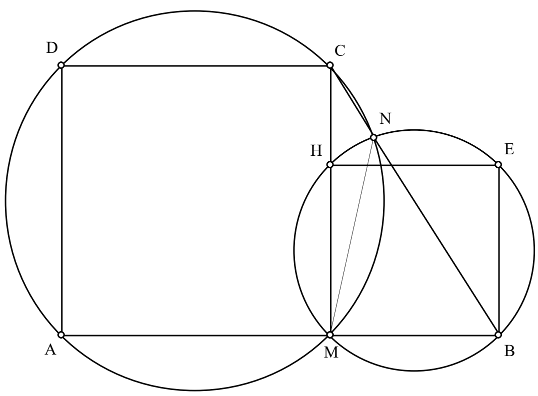


figura 1

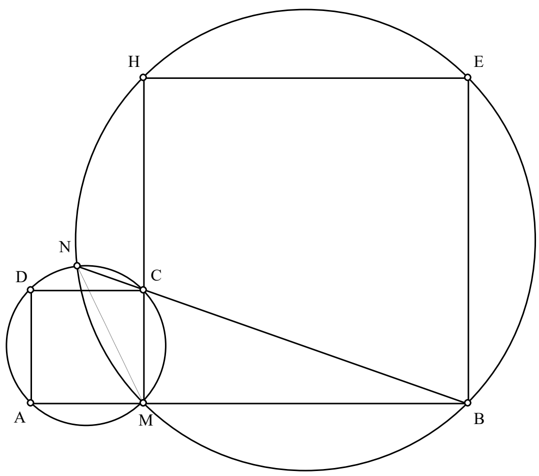


figura 2

1. Tenemos $\angle MNB = 45^{\circ}$.

Si es la figura 1, se verifica que $\angle CNM + \angle MNB = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$; si la figura 2, $\angle MNC = \angle MNB\ (= 45^\circ)$.
En ambas situaciones se concluye que B, N y C están alineados.

2. Por una parte, $CH \perp AB$. Por otra, $BH \perp ME$ y $ME \| AC$; luego $BH \perp AC$. Por tanto, H es el ortocentro de ΔABC.

Problema 3

Sean x, y, z números reales positivos.

1. Si $x+y+z \geq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 3$?
2. Si $x+y+z \leq 3$, ¿se verifica necesariamente que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$?

Solución:

1. La respuesta es no.
   Contraejemplo con los números 1, 2 y 0.1

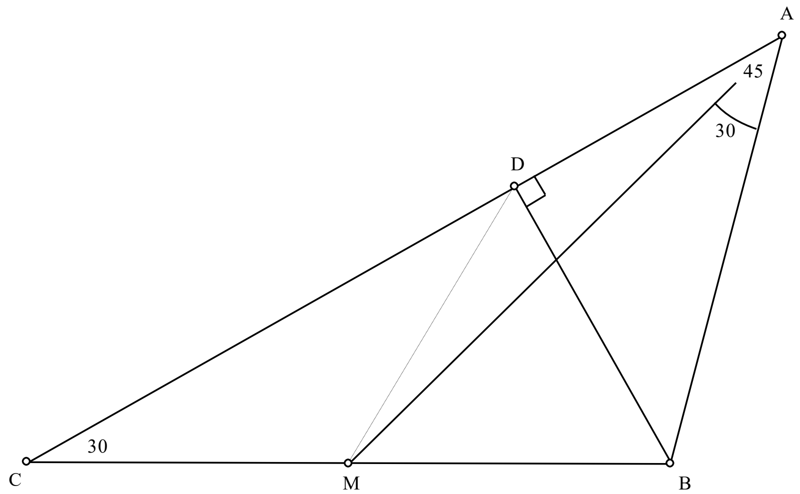
2. La respuesta es sí.
   En efecto,
$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$
   de donde $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$.

Problema 4

Se considera un triángulo ABC con $\angle BAC = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45^\circ$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

Solución:

Sea D el punto de AC tal que $BD \perp AC$.



Puesto que $\angle DBA = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, el triángulo ADB es isósceles con $AD = DB$.

Pues ΔCDB es rectángulo en D, $CM = MD$ y, por tanto, $\angle CDM = 30^\circ$. El teorema del ángulo exterior aplicado en D al triángulo isósceles ADB da $\angle DAM = 15^\circ$.

El mismo teorema aplicado ahora al triángulo ACM en M da inmediatamente $\angle AMB = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

En consecuencia, los triángulos ABC y MBA son semejantes y, por tener la misma altura, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases:

$$\frac{[ABC]}{[MBA]} = \frac{BC}{BM} = 2$$

Por consiguiente, la razón de semejanza vale $\sqrt{2}$. Tenemos, pues, que $\frac{AC}{AM} = \sqrt{2}$ y $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$.

La relación que se pide resulta al multiplicar miembro a miembro las dos igualdades anteriores.

Problema 5

Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.

Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca.

Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.

Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?

Solución:

Si asignamos a cada bola negra el valor 1 y a cada bola blanca el valor -1, se observa que dos bolas consecutivas se sustituyen por su producto.

Considerando el producto P de los nueve valores antes y después de cada operación, vemos que el nuevo P es igual al cuadrado del anterior P. Así, siempre será $P=1$ después de cada operación.

Puesto que nueve bolas blancas darían $P=-1$, no es posible obtener una tal configuración.

Problema 6

Se pide encontrar todos los números enteros positivos n tales que 3^n+5^n es múltiplo de $3^{n-1}+5^{n-1}$.

Solución:

Para un tal n, puesto que

$$3\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)<3^n+5^n<5\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

se verifica

$$3^n+5^n=4\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)$$

la cual se reduce a

$$5^{n-1}=3^{n-1}$$

que implica $n=1$.

Pues $n=1$ es solución (porque 8 es múltiplo de 2), se concluye que $n=1$ es la única solución.

Problema 1

Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Probar que $P(x_1^{\ 3}) = P(x_2^{\ 3})$.

Solución:

Tenemos $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2 - 1}{3}$ y

$$\begin{aligned} P(x_1^{\ 3}) - P(x_2^{\ 3}) &= 3x_1^{\ 6} + 3mx_1^{\ 3} + m^2 - 1 - (3x_2^{\ 6} + 3mx_2^{\ 3} + m^2 - 1) \\ &= 3(x_1^{\ 6} - x_2^{\ 6}) + 3m(x_1^{\ 3} - x_2^{\ 3}) \\ &= 3(x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3})(x_1^{\ 3} - x_2^{\ 3}) + 3m(x_1^{\ 3} - x_2^{\ 3}) \\ &= 3(x_1^{\ 3} - x_2^{\ 3})(x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + m) \end{aligned}$$

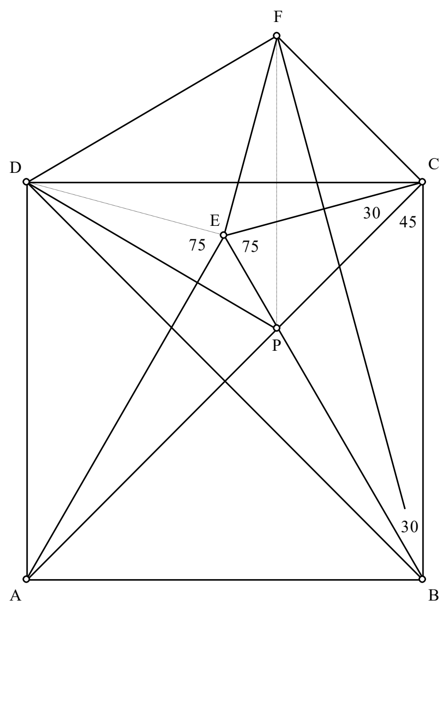
Pues $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3\dfrac{m^2 - 1}{3}(-m) = -m$, resulta $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + m = 0$ que implica $P(x_1^{\ 3}) - P(x_2^{\ 3}) = 0$ por lo visto anteriormente.

Problema 2

En el interior de un cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE. Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC. Se pide demostrar que:

a) el triángulo CEF es equilátero.
b) el triángulo DEF es rectángulo e isósceles.
c) el triángulo BDF es isósceles.
d) el triángulo PDF es equilátero.

Solución:



a) Puesto que $\angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, los ángulos en la base del triángulo isósceles BEC ($BE = BC$ por construcción) son iguales a 75°. Resulta que $\angle ECP = \angle ECB - \angle PCB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$, de donde se sigue que los triángulos CEP y BEC son semejantes, y siendo, como se ha dicho, isósceles este último, lo es también ΔCEP con $CE = CP$.
Por ser CD mediatriz del segmento PF, es $CP = CF$.
Luego $CE = CF$.
Ahora,
$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF = (90^\circ - \angle BCE) + \angle PCD = (90^\circ - 75^\circ) + 45^\circ = 60^\circ$.
Luego ΔCEF es equilátero.

b) Tenemos $CE = ED$ porque $\Delta BED \equiv \Delta AED$. Se sigue que los triángulos BCF y BED son iguales porque tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido (135°). Por tanto, $BF = BD$.
Luego ΔBDF es isósceles.

c) Tenemos $DE = EC = EF$ y

$$\angle DEA + \angle AEB + \angle BEC + \angle CEF = 75^\circ + 60^\circ + 75^\circ + 60^\circ = 270^\circ.$$

Por tanto, $DE = EF$ y $\angle DEF = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$.
Luego ΔDEF es rectángulo e isósceles.

d) Tenemos, en fin, $PF = FD$ por ser iguales los triángulos rectángulos DEF y PCF. Siendo, además,

$$\angle DFP = \angle DFE + \angle EFP = \angle DFE + (\angle EFC - \angle PFC) = 45^\circ + (60^\circ - 45^\circ) = 60^\circ$$

resulta que ΔPDF es, en efecto, equilátero.

Problema 3

Encontrar todas las funciones $f : \Re \to \Re$ tales que

$$x^2 \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^4.$$

Solución:

Sustituimos x por $1-x$ y obtenemos

$$(1-x)^2 \cdot f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$$

Al eliminar $f(1-x)$ entre esta ecuación y la dada, resulta $f(x) = 1 - x^2$.
Se comprueba que $f(x) = 1 - x^2$ satisface la ecuación propuesta.
La solución buscada es, por tanto, $f(x) = 1 - x^2$.

Problema 4

Un grupo de chicos y chicas han comido en un restaurante en el que sólo se sirven pizzas cortadas en 12 raciones. Cada chico comió 6 o 7 raciones y cada chica 2 o 3 raciones.

Se sabe que 4 pizzas no fueron suficientes y que con 5 pizzas hubo de sobra.

Calcular el número de chicos y de chicas del grupo.

Solución:

Sean x e y el número de chicos y de chicas, respectivamente.

Tenemos

$$7x + 3y \leq 59 \qquad (1)$$

y

$$6x + 2y \geq 49 \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$x + y \leq 10$$

y por (2),

$$6x + 2(10 - x) \geq 49$$

de donde $x \geq 8$.

Pero (1) implica que $x \leq 8$.

Luego $x = 8$.

Sustituyendo este valor en las desigualdades anteriores, debe ser $y = 1$.

Problema 5

Demostrar que la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$$

posee infinitas soluciones en números enteros.

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - z - 1)(x + z) = (y + 1)(4 - y) \end{aligned}$$

La última ecuación se satisface si

$$x - z - 1 = y + 1 \qquad \text{y} \qquad x + z = 4 - y$$

esto es, si

$$x = 3, \quad z = 1 - y \ .$$

Luego las ternas $(x, y, z) = (3, a, 1-a)$ con $a \in Z$ son soluciones de la ecuación.

> Son también soluciones las ternas $(x, y, z) = (3, a, 2-a)$

Problema 6

En un tablero de ajedrez 10×10 se colocan 41 torres. Probar que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.

Solución:

Pues $41 = 4 \times 10 + 1$, existe una fila A que contiene al menos 5 torres.

Quedan 9 filas con, al menos, 31 torres. Una fila B, de entre estas 9, contiene, al menos, 4 torres.

Quedan 8 filas con, al menos, 21 torres. Una fila C, de entre estas 8, contiene, al menos, 3 torres.

Quedan 7 filas con, al menos, 11 torres. Una fila D, de entre estas 7, contiene, al menos, 2 torres.

Quedan ahora 6 filas una de las cuales, sea E, contiene al menos 1 torre.

Elegimos una torre T_1 de la fila E.

Elegimos una torre T_2 de la fila D que no esté en la misma columna que T_1.

Elegimos una torre T_3 de la fila C que no esté en la columna de T_1 ni en la de T_2.

Elegimos una torre T_4 de la fila B que no esté en la columna de T_1 ni en la de T_2 ni en la de T_3.

Elegimos, en fin, una torre T_5 de la fila A que no esté en la columna de T_1 ni en la de T_2 ni en la de T_3 ni en la de T_4.

Las torres T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 no se comen entre sí.