OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local 2006

Viernes 20 de enero de 2006
Primera Sesión (mañana)

1. Se da un triángulo rectángulo isósceles *ABC*, con el ángulo recto en *C*, y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo *l* con centro *A* divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo *m* con centro en *B* es tangente al arco *l* en un punto de la hipotenusa *AB*.
Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

---

2. Se suponen conocidas las raíces reales de las *n* ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	*Raíces*
$x^2 + a_1 x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2 x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\cdots$	$\cdots$
$x^2 + a_n x + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0 .$$

---

3. En el triángulo *ABC* se traza la bisectriz interior *CD*. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo *BCD* coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo *ABC*. Calcular los ángulos del triángulo *ABC*.

Fase local 2006

Viernes 20 de enero de 2006
Segunda Sesión (tarde)

4. Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos *a* y *b*, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

---

5. Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.

---

6. Se considera la inecuación

$$|x-1| < ax,$$

donde *a* es un parámetro real.
a) Discutir la inecuación según los valores de *a*.
b) Caracterizar los valores de *a* para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

Fase local 2006

Viernes 20 de enero de 2006
Primera Sesión (tarde)

1. En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

---

2. Determinar todos los enteros n tales que

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

es entero.

---

3. Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras.
Encontrar la relación existente entre R y r.

Fase local 2006

Sábado 20 de enero de 2006
Segunda Sesión (mañana)

4. Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación

$$x^2+px+q=0$$

sean D y $1-D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

---

5. Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:

$$22=2^1\cdot 11^1;\quad 23=23^1;\quad 24=2^3\cdot 3^1.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?. Razónese la contestación.

6. Los vértices del cuadrilátero convexo *ABCD* están situados en una circunferencia. Sus diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *E*. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABC*, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABD*. La recta O_1O_2 corta a *EB* en *M* y a *EA* en *N*.
Demostrar que el triángulo *EMN* es isósceles.

Fase local 2006

Sábado 20 de enero de 2006
Primera Sesión (mañana)

1. Los números reales no nulos *a* y *b* verifican la igualdad

$$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1.$$

Encontrar, razonadamente, todos los valores tomados por la expresión

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

2. ¿Existe un conjunto infinito de números naturales que NO se pueden representar en la forma

$$n^2+p,$$

siendo *n* natural y *p* primo? Razónese la contestación.

3. En el triángulo *ABC*, se trazan la bisectriz interior *AL* (*L* pertenece al lado *BC*), la altura *BH* (*H* pertenece al lado *AC*) y la mediana *CM* (*M* pertenece al lado *AB*).
Se sabe que los ángulos $\angle CAL$, $\angle ABH$ y $\angle BCM$ son iguales.
Determinar, razonadamente, las medidas de los ángulos del triángulo *ABC*.

Fase local 2006

Sábado 20 de enero de 2006
Segunda Sesión (tarde)

4. Determinar todas las ternas de números reales (a,b,c), con $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$, tales que las parábolas

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = bx^2 + cx + a$$

tienen el mismo vértice.

---

5. Encontrar todas la soluciones (x,y) reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 y + xy^2 = -2 \end{array}\right\}$$

---

6. Decimos que tres números naturales distintos forman una *terna aditiva* si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.

Soluciones en formato Microsoft Word 2000 comprimido .zip (92 Kb)

|Página principal||InfoAlumnos||InfoProfesores||Otros sitios de interés||Problemas|

Actualizado 28 Enero 2006