XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 15 de enero de 2010

1. Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.

¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

2. Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.

3. Halla todos los números naturales n que verifican la condición:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. (Esto es, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\dfrac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$, etc.)

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

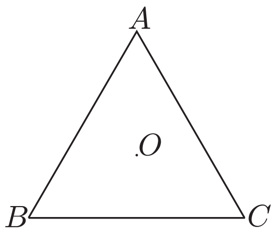
XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2010

4. Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.



Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

5. Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[4]{97 - X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

6. Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

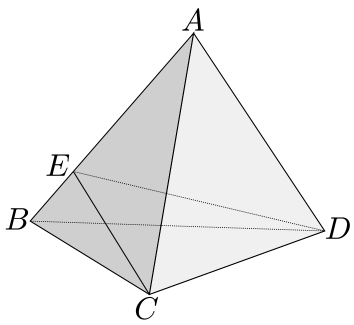
Sábado mañana, 16 de enero de 2010

1. Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

2. Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?



3. Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.

(a) Encuentra un conjunto *especial* formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto *especial* formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 16 de enero de 2010

4. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.

Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas.

5. Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[3]{1729 - X} + \sqrt[3]{X} = 19.$$

6. Averigua qué números de cuatro cifras significativas, $\overline{abcd}$ (con $a \neq 0$), son iguales a $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$.

Nota: La notación $\overline{ab}$ representa, en este problema, el número que tiene a decenas y b unidades; en este caso se tiene que $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.