XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 21 de enero de 2011

1. Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:

$$2009 = 7\times7\times7\times7-7\times7\times7-7\times7\,, \qquad 2010 = 66\times6\times6-66\times6+6\times6-6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible $2011 = 1+1+1+\ldots$.

2. Dos semirrectas tienen su común origen en el punto O. Se considera una circunferencia C_1 tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia d_1 de O, y cuyo radio es r_1. Se construyen sucesivamente las circunferencias C_n, de modo que C_n es tangente a las semirrectas, tangente exterior a C_{n-1} y tal que la distancia de su centro a O, d_n, es menor que d_{n-1}, para $n>1$. Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias C_n, para todo n, en función de r_1 y d_1.

3. Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 21 de enero de 2011

4. Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2\,b^2 + 3\,c^2$.

5. Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre R y r.

6. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales excluido el cero y por $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales incluido el cero. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ que sean crecientes, es decir $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$, y tales que $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 22 de enero de 2011

1. Sean n_1 y n_2 dos números naturales. Demuestra que la suma $\sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$ es un número entero o un número irracional.

2. Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.

3. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 22 de enero de 2011

4. Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

5. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 2^y - 1 &= 2^x + 2^{-x}\,, \\ 3 \cdot 2^z - 1 &= 2^y + 2^{-y}\,, \\ 3 \cdot 2^x - 1 &= 2^z + 2^{-z}\,. \end{aligned}\right\}$$

6. En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos A, B, C y D, el país A tiene el doble de representantes que el B, el triple que el C, y el cuádruple que el D. Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los paises debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.