XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de diciembre de 2011

1. Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45^\circ$, y sea P el pie de la altura por B. Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y. Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X, respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB. Demostrar que L es el punto medio de KB.

3. Los puntos A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n+1} son los vértices de un polígono regular de $2n+1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de diciembre de 2011

4. Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

5. En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30°, 60° y 90°, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

6. Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean H_A, H_B, H_C los ortocentros de los triángulos PBC, PAC y PAB, respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_AH_BH_C$ y ABC tiene igual área.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 17 de diciembre de 2011

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD y PDA tengan la misma área.

2. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos A, B y C cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

3. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) entra las esferas del montón.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 17 de diciembre de 2011

4. Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen, para todo x real positivo, la condición

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

5. Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

6. Los puntos A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n} son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo y el número de ternas tales que el triángulo es acutángulo.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.