OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Viernes

1 Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$y^k = x^2 + x$$

donde k es un número entero dado mayor que 1.

2 Busca un polinomio de grado tres cuyas raíces sean, precisamente, el cuadrado de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

3 Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano OXY de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje OX y otro con el eje OY. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:

1. El punto medio del lado de contacto con los ejes.
2. El centro del cuadrado.
3. Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Viernes

4 Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

5 Obtén los dos valores enteros de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

6 Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Sábado

1 Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.

2 Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.

3 En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Sábado

4 Demuestra que el producto de los dos mil trece primeros términos de la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$$

no llega a valer 3.

5 Resuelve esta ecuación exponencial

$$2^x \cdot 3^{5^{-x}} + \frac{3^{5^x}}{2^x} = 6$$

6 Sean A, B y C los vértices de un triángulo y P, Q y R los respectivos pies de las bisectrices trazadas desde esos mismos vértices. Sabiendo que PQR es un triángulo rectángulo en P, se te pide probar dos cosas:

a) Que ABC ha de ser obtusángulo.

b) Que en el cuadrilátero $ARPQ$, pese a no ser cíclico, la suma de sus ángulos opuestos es constante.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.