LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de enero de 2015

1. Demuestra que

$$(ax+by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1, a, b \geq 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

2. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

3. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de de los puntos obtenidos por todos los equipos salvo el campeón es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de enero de 2015

4. Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z\,, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

5. En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. El punto E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que

$$\widehat{CED} = 2\widehat{AEB}$$

si y sólo si $AC = EC$.

6. Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 17 de enero de 2015

1. Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "Sí".

2. El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles en C, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$?

3. Sean x, y, z reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y + 2} + \sqrt{3z + 6}.$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 17 de enero de 2015

Olimpiada Matemática Española RSME

4. Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican

$$f(n) + f(n+1) = 2n + 1$$

para cualquier entero n y además

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$$

5. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que, siempre que formamos n parejas con las bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.

1) Demuestra que hay cuatro bolas con el mismo número.

2) Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho $n - 1$.

6. Encuentra todos los enteros positivos n, que verifican

$$n = 2^{2x-1} - 5x - 3 = \left(2^{x-1} - 1\right)\left(2^x + 1\right)$$

para algún entero positivo x.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.