Soluciones, tarde del jueves 21 de enero

1. Determinar todos los números de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$ tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

Solución. Comenzamos observando que el número que resulta de insertar un 0 al final de n es $10n$, que al ser múltiplo de 7 obliga a que n también lo sea. De hecho, son múltiplos de 7 los siguientes cinco números:

$$\begin{aligned}
n = \overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\
x = \overline{a0bcd} &= 10000a + 100b + 10c + d \\
y = \overline{ab0cd} &= 10000a + 1000b + 10c + d \\
z = \overline{abc0d} &= 10000a + 1000b + 100c + d \\
w = \overline{abcd0} &= 10000a + 1000b + 100c + 10d
\end{aligned}$$

Como n, x son múltiplos de 7, también lo es su diferencia $x - n = 9000a$, y puesto que 9000 no es múltiplo de 7, debe serlo a. Al ser n un número de 4 cifras, se tiene que $a \neq 0$ y necesariamente debe ser $\boxed{a = 7}$.

De forma similar, $y - n = 9000a + 900b$ es múltiplo de 7, y sabemos que a es múltiplo de 7, luego $900b$ es múltiplo de 7. Y como 900 no es múltiplo de 7, debe serlo b, y se deduce que $\boxed{b = 0 \text{ o } b = 7}$.

Análogamente, razonando con $z - n = 9000a + 900b + 90c$ se obtiene que $\boxed{c = 0 \text{ o } c = 7}$, e insertando las condiciones de ser a, b, c múltiplos de 7 en el número de partida n deducimos que también $\boxed{d \text{ es } 0 \text{ o } 7}$.

Así pues, los números buscados son todos los que empiezan por 7 y las restantes cifras son 0 o 7:

$$7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777.$$

2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

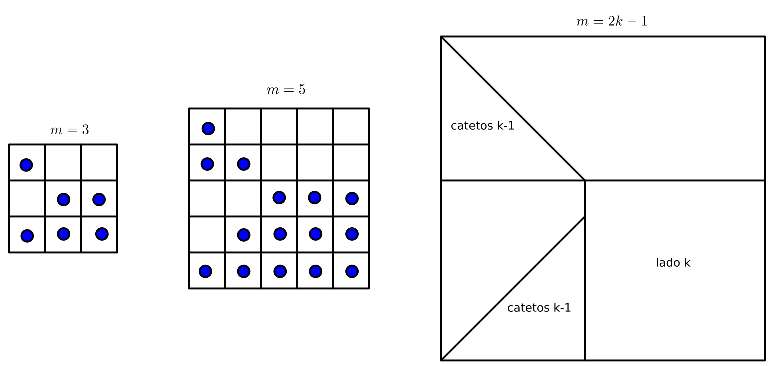
Solución 1. Veremos que las soluciones son todas las parejas (m, n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m - 1$ si m es par.

Para $m = 1$, es inmediato que cualquier tablero $(1, n)$ es posible, por ejemplo llenándolo completamente de piedras.

Nótese la condición necesaria $n \geq m - 1$: para m filas son necesarias al menos $m - 1$ columnas, ya que $m - 1$ es la menor cantidad de piedras que puede contener la fila que tenga más piedras.

Sea $m \geq 3$ impar. Veamos que no es posible alcanzar el caso límite $n = m - 1$. En efecto, para llenar un tablero $(m, m - 1)$ con distintas cantidades de piedras en cada fila, es necesario que las filas tengan $0, 1, \ldots, m - 1$ piedras, en algún orden. El número total de piedras es $\frac{(m-1)m}{2}$, y debe ser igual a $t(m - 1)$, siendo t la cantidad de piedras de cada columna. Como la igualdad $\frac{m}{2} = t$ es imposible cuando m es impar, en este caso el número de columnas debe ser $n \geq m$.

Una solución válida para el tablero (m, m), para $m = 2k - 1$, se obtiene siguiendo el esquema de la siguiente figura:



Las piedras se colocan en dos triángulos rectángulos isósceles de catetos $k - 1$, y en un cuadrado de lado k. Las cantidades de piedras en las filas son $1, 2, \ldots, k - 1, k, k + 1, \ldots, 2k - 1$, y cada columna tiene k piedras.

Para $m \geq 2$ par, el tablero $(m, m - 1)$ se resuelve partiendo de una solución del tablero $(m - 1, m - 1)$ y añadiendo una fila vacía.

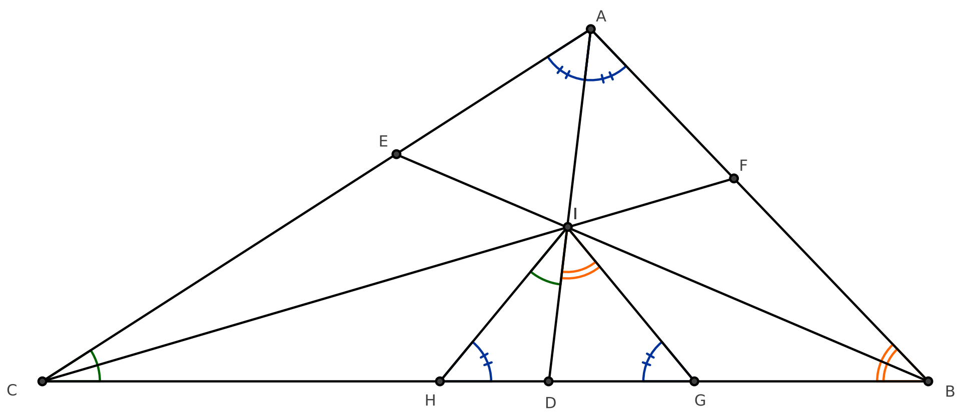
Finalmente, toda solución para un tablero (m, n) puede extenderse a un tablero $(m, n + 1)$, de esta manera: si todas las columnas tienen t piedras, colocamos t piedras en la nueva columna, en las posiciones correspondientes a las t filas que más piedras tenían. Así, las columnas siguen teniendo t piedras cada una, y sigue sin haber dos filas con el mismo número de piedras. Repitiendo las veces que haga falta la operación de paso de (m, n) a $(m, n+1)$, se resuelven todos los tableros (m, n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m-1$ si m es par.

Solución 2. Similar a la anterior, utilizando el siguiente procedimiento para rellenar las casillas en el tablero (m, m), cuando m es impar.

Vamos a colocar k piedras en la fila $k \in [1, n]$. Empezamos por la esquina superior izquierda colocando una piedra. Si la fila tiene todas las piedras que vamos a colocar, seguimos por la casilla inmediatamente abajo a la derecha (si estamos a la derecha del todo, seguimos por la izquierda del todo). Si la fila aún no tiene todas las piedras, entonces seguimos colocando piedras inmediatamente a la derecha de la anterior (la misma convención aplica en el borde). Evidentemente cuando hayamos terminado la última fila, todas las filas tendrán el número deseado de piedras. Además, como el número total de piedras es divisible por el número de columnas, habrá el mismo número de piedras en cada columna.

3. En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.

Solución Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos.



Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir $\angle DGI = \angle DAB$. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene $\angle DHI = \angle DAC$.

Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI.

Las simetrías que acabamos de establecer prueban que:

$$\angle BHE = BAE \quad \text{y} \quad \angle CGF = \angle CAF,$$

y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Nota: otras soluciones pueden probar y utilizar que los cuadriláteros $ABGI$ y $ACHI$ son inscriptibles (cíclicos), y/o que G, H son puntos de la circunferencia de centro I que pasa por A.

4. Al desarrollar $(1+x+x^2)^n$ en potencias de x, exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de n es esto posible?

Solución Empezamos estudiando qué efecto tiene sobre los coeficientes de un polinomio multiplicar por $(1+x+x^2)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{n+1} &= (1+x+x^2)^n(1+x+x^2)\\ &= (a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)(1+x+x^2)\\ &= a_o+(a_o+a_1)x+(a_o+a_1+a_2)x^2+\\ &+ (a_1+a_2+a_3)x^3+\cdots\end{aligned}$$

Si llamamos $\{a_i\}_{i=0}^{2n}$ a los coeficientes de $P_n(x)=(1+x+x^2)^n$ y $\{b_i\}_{i=0}^{2n+2}$ a los de $P_{n+1}(x)$, entonces para todo i se cumple que $b_i=a_{i-2}+a_{i-1}+a_i$, identificando con 0 los coeficientes que no están definidos. Esto sugiere ordenar los coeficientes de los polinomios $P_n(x)$ en forma de triángulo, empezando con 1 en la cúspide, y donde los restantes coeficientes son la suma de los tres que se sitúan por encima de él. Algo así:

```
1
1  1  1
1  2  3  2  1
1  3  6  7  6  3  1
1  4 10 16 19 16 10  4  1
..............................
```

Cada fila es simétrica con extremos 1, y el coeficiente central siempre es impar por ser suma de un impar más dos números iguales.

También vemos que para $n=1,2,4$, $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares. Veamos que esta situación ocurre para todas las potencias de 2. Es sencillo comprobar que si $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares (necesariamente los de grado 0, n y $2n$), lo mismo ocurre para $P_{2n}(x)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{2n} &= \left((1+x+x^2)^n\right)^2\\ &\equiv (1+x^n+x^{2n})^2\equiv 1+x^{2n}+x^{4n} \pmod 2,\end{aligned}$$

donde hemos despreciado los "dobles productos", al trabajar módulo 2. Partiendo de que $P_1(x)$ tiene 3 términos impares, el procedimiento anterior de paso de n a $2n$ prueba que $P_n(x)$ tiene 3 términos impares para todo n potencia de 2. Veamos que no existen más valores de n con esta propiedad.

Si n no es potencia de 2, existen una potencia de 2 dada por $a=2^k$ y un número b, con $0<b<a$, tales que $n=a+b$. Por lo visto antes, podemos asumir que $P_a(x)\equiv 1+x^a+x^{2a} \pmod 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}P_n(x)=P_b(x)P_a(x) &\equiv P_b(x)(1+x^a+x^{2a}) \pmod 2\\ &\equiv P_b(x)+(\text{términos de grado}\geq a>b)\end{aligned}$$

Además, sabemos que $P_b(x)$ tiene su término central x^b impar, y este término "sobrevive" sin que nadie lo cancele, por lo que $P_n(x)$ tiene al menos 4 términos impares: los de grado 0, b, n y $2n$.

Soluciones, mañana del viernes 22 de enero

1. En un torneo de ajedrez participan 8 maestros durante 7 días. Cada día se disputan 4 partidas en las cuales participan todos los maestros, y al finalizar el torneo todos se han enfrentado contra todos exactamente una vez. Demostrar que al terminar el quinto día del torneo existe un conjunto de al menos 4 maestros que ya han jugado entre ellos todas las partidas.

Sea A_1 un maestro cualquiera. Llamamos B_1 a su rival del día 6, A_2 al rival de B_1 el día 7, B_2 al rival de A_2 el día 6, y así sucesivamente, hasta que se cierre un ciclo:

$$A_1 \xrightarrow{6} B_1 \xrightarrow{7} A_2 \xrightarrow{6} B_2 \xrightarrow{7} \cdots \xrightarrow{7} A_n \xrightarrow{6} B_n \xrightarrow{7} A_1,$$

donde hemos indicado con 6 y 7 el día en que se juega la partida. Nótese que el adversario de A_1 el día 7 no puede ser uno de los A_n, con $n \geq 2$, pues A_n ya ha jugado contra B_{n-1} el mismo día 7. La longitud del ciclo formado es entonces par, y pueden darse estas situaciones:

$$A_1 \xrightarrow{6} B_1 \xrightarrow{7} A_2 \xrightarrow{6} B_2 \xrightarrow{7} A_3 \xrightarrow{6} B_3 \xrightarrow{7} A_4 \xrightarrow{7} B_4 \xrightarrow{7} A_1 \quad (1)$$

$$A_1 \xrightarrow{6} B_1 \xrightarrow{7} A_2 \xrightarrow{6} B_2 \xrightarrow{7} A_3 \xrightarrow{6} B_3 \xrightarrow{7} A_1 \quad (2)$$

$$A_1 \xrightarrow{6} B_1 \xrightarrow{7} A_2 \xrightarrow{6} B_2 \xrightarrow{7} A_1 \quad (3)$$

En la situación (1), resulta que durante los días 6 y 7 no ha habido partidas entre los elementos del conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, por lo tanto han debido completar todos sus enfrentamientos durante los primeros 5 días, y lo mismo ocurre para el conjunto $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

La situación (2) no puede darse porque deja una sola forma (no permitida) de completar las jornadas 6 y 7: ambas con el enfrentamiento entre los dos maestros que aún no han intervenido.

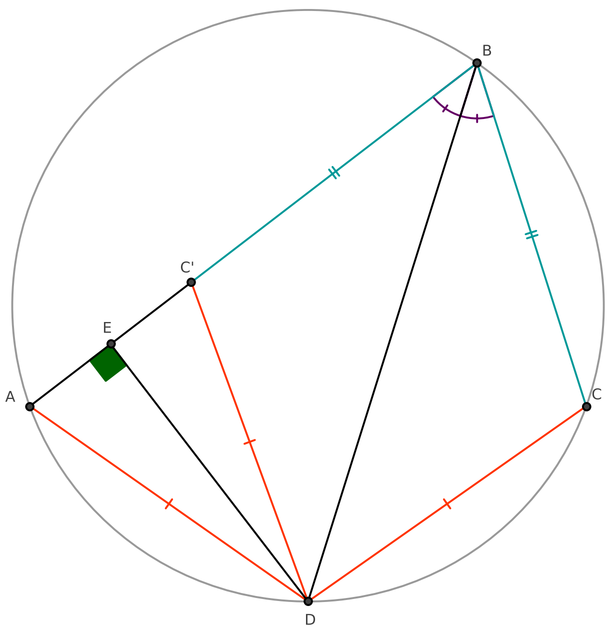
Finalmente, (3) sí puede ocurrir, y las jornadas 6 y 7 se completarían de esta manera, etiquetando adecuadamente los maestros:

$$A_3 \xrightarrow{6} B_3 \xrightarrow{7} A_4 \xrightarrow{6} B_4 \xrightarrow{7} A_3.$$

Los conjuntos $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\{A_1, A_2, B_3, B_4\}$, $\{B_1, B_2, A_3, A_4\}$ y $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ cumplen la condición pedida en el enunciado: al no haber enfrentamientos internos durante las jornadas 6 y 7, deben haberse completado las partidas entre los días 1 y 5.

2. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90^o$. Probar que $AE = \frac{AB-BC}{2}$.

Solución 1 Sea C' el punto simétrico de C con respecto a la recta BD, lo incluimos en la figura.



Por simetría se tiene que $\angle C'BD = \angle CBD$, $BC' = BC$ y $DC' = DC$. En particular C' está en el segmento AB y cumple que $AC' = AB - BC$.

Además, el triángulo DAC' es isósceles con $DA = DC'$, por lo tanto la altura y la mediana de D deben coincidir, es decir:

$$AE = \frac{AC'}{2} = \frac{AB - BC}{2}.$$

Solución 2.

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos ABD y BCD,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos(\alpha),$$
$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos(\alpha),$$

donde hemos denotado $\alpha = \angle ABD = \angle DBC$. Como $AD = CD$ y $AB \neq BC$, se tiene igualando ambas expresiones que

$$\begin{aligned} (AB + BC)(AB - BC) &= AB^2 - BC^2 = 2BD(AB - BC)\cos(\alpha), \\ BE &= BD\cos(\alpha) = \frac{AB + BC}{2}. \end{aligned}$$

Luego $AE = AB - BE = \frac{AB-BC}{2}$.

3. Demostrar que todos los números racionales pueden expresarse como suma de algunas fracciones de la forma $\frac{n-1}{n+2}$, con $n \geq 0$ entero, admitiendo repetir sumandos.

Solución 1. Llamamos $f(n) = \frac{n-1}{n+2}$, y denotamos por A al conjunto de números que pueden expresarse como suma de elementos $f(n)$, para ciertos $n \geq 0$. Probaremos que $A = \mathbb{Q}$.

Todo número racional puede escribirse como un cociente $\frac{k}{n}$, con k entero (positivo, negativo o nulo) y n estrictamente positivo. Ahora bien, A tiene la propiedad de que si x, y están en A, la suma $x + y$ también lo está. Por lo tanto, para ver que $A = \mathbb{Q}$ será suficiente probar que A contiene a los números $\dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{-1}{n}$, para todo $n \geq 1$.

Demostraremos que 1 y -1 están en A, lo cual luego necesitaremos aplicar en momentos oportunos:

•$f(0) = \frac{-1}{2}$, por lo que $f(0) + f(0) = -1 \in A$.

•$f(2) = \frac{1}{4}$, luego $4f(2) = 1 \in A$.

Ahora sí vamos a la caza de las fracciones $\dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{-1}{n}$ para $n \geq 2$:

$$f(3n-2) = \frac{3n-3}{3n} = 1 - \frac{1}{n} \in A \Rightarrow f(3n-2) + 2f(0) = \frac{-1}{n} \in A.$$

En consecuencia, sumando $n-1$ veces $\frac{-1}{n} \in A$ llegamos a que $\frac{1-n}{n} \in A$, y sumando $1 \in A$ obtenemos que $\frac{1}{n} \in A$, lo que nos faltaba para terminar el problema.

Solución 2. Llamemos $q_n = \frac{n-1}{n+2}$. Se tiene entonces que $q_1 = 0$, $q_0 = -\frac{1}{2}$ y $q_4 = \frac{1}{2}$. En particular, es posible obtener de la forma deseada el 0 y todos los racionales de la forma $\frac{u}{2}$ (incluyendo que u sea negativo, o que u sea par con lo que el racional será entero), tomando la suma de $|u|$ veces q_0 si $u < 0$ y u veces q_4 si $u > 0$. Podemos ahora completar el problema escribiendo cada racional no nulo en la forma $\frac{u}{v}$ con v entero positivo y u entero no nulo, y por inducción sobre v. Ya hemos visto que para $v = 1, 2$ se puede obtener el racional como suma de q_i's, luego los basta con probar que si para $v = 1, 2, \ldots, m-1$ se puede obtener cada racional como suma de q_i's, también se puede para $v = m \geq 3$.

Si $m \geq 3$ es coprimo con 3, tomemos $n = m - 2$, con lo que $q_n = \frac{m-3}{m}$, y como m es coprimo con 3 y $m - (m-3) = 3$, se tiene que $m - 3$ y

m son coprimos. Consideremos ahora los siguientes números:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{m} &= \frac{u}{m} - 0, \\
\frac{u}{m} - \frac{m-3}{m} &= \frac{u+3}{m} - 1, \\
\frac{u}{m} - 2 \cdot \frac{m-3}{m} &= \frac{u+6}{m} - 2, \\
&\vdots \\
\frac{u}{m} - (m-1) \cdot \frac{m-3}{m} &= \frac{u+3(m-1)}{m} - (m-1).
\end{aligned}$$

Nótese que los m números $u, u+3, u+6, \ldots, u+3(m-1)$ dan todos restos distintos al dividir entre m, pues si dos dieran el mismo resto, se tendría que existen i, j, con $0 \leq i < j \leq m-1$, tales que $3(i-j)$ es múltiplo de m. Pero al ser m coprimo con 3, sería $0 < i-j < m$ múltiplo de m, absurdo. Como hay m tales números, exactamente uno de ellos es múltiplo de m, es decir, existe un $0 \leq k \leq m-1$ tal que $\frac{u}{v} - kq_n$ es una fracción reducible con denominador m, luego se puede escribir como $\frac{u'}{v'}$ con u' entero y v' entero positivo menor que m. Por hipótesis de inducción esta fracción puede ponerse como suma de q_i's, suma a la que añadiendo k veces q_n se obtiene $\frac{u}{v}$, y hemos terminado en este caso.

Si $m \geq 3$ es múltiplo de 3, entonces es de la forma 3ℓ. Tomemos $n = 9\ell - 2$, con lo que $q_n = \frac{3\ell-1}{3\ell}$, y podemos repetir el razonamiento anterior. Luego también en este caso se puede escribir $\frac{u}{m}$ como suma de q_i's, y hemos terminado el problema por inducción.

4. Determinar todas las funciones f tales que

$$f(xf(y)+y)=f(xy)+f(y)$$

para cualesquiera números reales x, y.

Solución 1. Llamamos (E) a la ecuación del enunciado. Para cada $k \in \mathbb{R}$, la función $f(x)=k$ es solución si y sólo si $k=k+k$, es decir $k=0$. Así, la función $f(x)=0$ verifica (E), y es la única solución constante.

Por otra parte, la función identidad $f(x)=x$ también verifica (E), ya que los términos izquierdo y derecho son iguales a $xy+y$, para todo x, y. Probaremos que no hay más soluciones que las ya encontradas $f(x)=0$ y $f(x)=x$.

Ahora sustituimos $x=0$ en (E), lo cual resulta en $f(y)=f(0)+f(y)$, y se deduce que $f(0)=0$.

Si f no fuera la función identidad, existiría al menos un número real a tal que $f(a) \neq a$, con $a \neq 0$, ya que $f(0)=0$. Para ese valor de a, la ecuación $xf(a)+a=xa$ tiene solución $x=\frac{a}{a-f(a)}$, y sustituyendo en (E) y simplificando $f(xf(a)+a)=f(xa)$ obtenemos que $f(a)=0$.

A continuación, volvemos a la ecuación (E) con y igual al valor anterior de a, permitiendo que x tome valores arbitrarios:

$$\begin{aligned} f(xf(a)+a) &= f(ax)+f(a) \\ \underbrace{f(0+a)}_{=0} &= f(ax)+0. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que $f(ax)=0$ para todo x. Puesto que $a \neq 0$, el cambio de variable $x=\frac{y}{a}$ revela que $f(y)=0$ para todo y, caso ya estudiado. Esto confirma que toda solución f debe ser la función identidad o la función nula.

Solución 2. Tomando $x=0$ se tiene que $f(y)=f(0)+f(y)$, es decir $f(0)=0$. Claramente, $f(x)=0$ para todo real x es solución ya que ambos lados de (E) serían nulos. Supondremos en adelante que $f(x) \neq 0$ para al menos un real x.

(1) Probaremos que si $f(r) \neq 0$, entonces $f(r)=r$. En efecto, si fuera $f(r) \neq r$, existe un real $z=\frac{r}{r-f(r)}$ tal que $zf(r)+r=rz$, con lo que tomando $x=z$ e $y=r$ en (E) y llamando $k=zf(r)+r=rz$, se tiene que $f(k)=f(k)+f(r)$, o sea $f(r)=0$.

(2) Probaremos que si f no es idénticamente nula, entonces es la función identidad. En efecto, sea r tal que $f(r) \neq 0$, en particular $f(r)=r \neq 0$. Para cada real z, veamos que $f(z)=z$. Para ello, sustituimos en (E) los valores $x=\frac{z}{r}$ e $y=r$, con lo que $xf(y)=xy=z$, por tanto

$$f(z+r)=f(z)+r.$$

Claramente, no pueden ser $f(z)$ y $f(z+r)$ nulos a la vez, pues en ese caso se tendría $f(r)=0$, contradicción. Luego uno de los dos ha de ser no nulo. Pero si $f(z)\neq 0$, por (1) se tiene que $f(z)=z$ y entonces $f(z+r)=z+r$, y si $f(z+r)\neq 0$, entonces $f(z+r)=z+r$ y $f(z)=(z+r)-r=z$. En ambos casos $f(z)=z$, como queríamos.

Concluimos entonces que hay dos soluciones: $f(x)=0$, para la que ambos miembros de (E) valen 0, y $f(x)=x$, para la que ambos miembros de (E) valen $xy+y$.

Solución 3.

(1) $f(0)=0$, lo cual se obtiene sustituyendo $x=0$ en (E).

(2) Si $y\neq 0$, $f(y)=0$ implica $f\equiv 0$ (f es idénticamente nula). En efecto, sustituyendo en (E) resulta $f(xy)=0$ para todo x, por tanto al ser $y\neq 0$ se obtiene que $f\equiv 0$.

(3) A partir de ahora supondremos que f no es idénticamente nula, en particular por (2) se tiene que $f(y)=0$ implica $y=0$.

(4) Si $a,b\neq 0$ son tales que $f(a)=-f(b)$, entonces $a=-b$. Para ver esto, sustituimos $x=\frac{b}{a}$, $y=a$:

$$f\left(\frac{b}{a}f(a)+a\right)=f(b)+f(a)=0,$$

luego en virtud de (3) se tiene $\frac{b}{a}f(a)+a=0$, es decir $f(a)=-\frac{a^2}{b}$. Intercambiando a y b obtenemos que $f(b)=-\frac{b^2}{a}$, y sumando ambas expresiones:

$$0=f(a)+f(b)=-\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=-\frac{(a^3+b^3)}{ab}=-\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab},$$

y se deduce que $a=-b$.

(5) Veamos que para todo $y\neq 0$ se tiene $f(y)=y$. Por (3) sabemos que $f(y)\neq 0$, luego podemos definir $x=-\frac{y}{f(y)}$, o sea que $xf(y)+y=0$. Obtenemos

$$0=f(0)=f(xf(y)+y)=f(xy)+f(y)=f\left(-\frac{y^2}{f(y)}\right)+f(y),$$

entonces en virtud de (4) tenemos que $\frac{y^2}{f(y)}=y$, es decir $f(y)=y$.

Como en las soluciones anteriores, se concluye que $f\equiv 0$ y $f(x)=x$ son las únicas soluciones de la ecuación funcional.