LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Mañana del viernes 21 de enero de 2022
Sesión única

Problema 1. Un número n de siete cifras es *bonito* si se puede expresar como la suma de dos números de siete cifras s y t, tales que todas las cifras de s son impares y todas las cifras de t son pares.
Determinar cuáles de los siguientes números son bonitos:

$$6204773, 6372538, 7343053, 8993267, 9652393.$$

Problema 2. Sea ABC un triángulo isósceles con $\angle BAC = 100°$. La bisectriz del ángulo $\angle CBA$ corta al lado AC en el punto D.
Demostrar que $BD + DA = BC$.

Problema 3. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_5^2)\,(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_6^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_5a_6)^2.$$

Demostrar que los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ están en progresión geométrica.

Problema 4. Un grupo de 12 piratas de edades diferentes se reparte 2022 monedas, de manera que cada pirata (salvo el más joven) tiene una moneda más que el siguiente más joven. A continuación, cada día se procede de la siguiente manera: se escoge a un pirata que tenga al menos 11 monedas, y ese da una moneda a todos los demás.
Encontrar el mayor número de monedas que un pirata puede llegar a tener.

No está permitido el uso de calculadoras,
libros, o dispositivos electrónicos.
Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo: 4 horas.

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Tarde del viernes 21 de enero de 2022
Sesión única

Problema 1 . En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: “hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha".
Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.

Problema 2 . Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que

$$\text{área}(PAB) \cdot \text{área}(PCD) = \text{área}(PBC) \cdot \text{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Problema 3 . Hallar todas las ternas de números reales (a, b, c) que cumplan el sistema

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Problema 4 . Encontrar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$

para cualesquiera números reales x, y, z.

No está permitido el uso de calculadoras,
libros, o dispositivos electrónicos.
Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo: 4 horas.