LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Enunciados y soluciones - Mañana del viernes

Problema 1. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \dots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a \mid b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.

Solución. Vamos a demostrar que el menor valor posible es $n = 11$. Comenzamos notando que cada uno de los números $2^0, 2^1, \dots, 2^{10}$ tiene que ser de un color diferente, con lo que hay que usar por lo menos 11 distintos.
Consideremos ahora la siguiente coloración. Pintamos el número 1 del color uno; los números 2 y 3 del color dos; y en general los números del 2^{k-1} al $2^k - 1$ con el color k, donde $1 \leq k \leq 11$ (obviamente, cuando $k = 11$ solo pintamos hasta 2023). De esta manera, el cociente de dos números que comparten color es menor que dos. Esto significa que ninguna pareja del mismo color satisface una relación de divisibilidad, y hemos concluido.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, $1, 2, \dots, n$, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

Solución. Vamos a distinguir tres casos distintos.

(i) Supongamos que n es impar. En este caso, María comienza sumando 1 a la pareja $(1, n)$, luego a la $(3, n + 1)$ (donde el $n + 1$ es resultado de la primera iteración del proceso), y así sucesivamente hasta llegar a la $(n - 2, n + (n - 3)/2)$. De esta manera, consigue tener en la pizarra todos los números pares menores que n escritos dos veces y además el número $(3n-1)/2$. Finalmente, coge la pareja $(2, 2)$ y le suma $(3n - 5)/2$, a la pareja $(4, 4)$ le suma $(3n - 9)/2$, y así sucesivamente hasta llegar a la pareja $(n-1, n-1)$, a la que le suma $(n+1)/2$. De esta manera, todos los números de la pizarra son iguales a $(3n - 1)/2$.

(ii) Supongamos que n es un múltiplo de 4, esto es, $n = 4k$. En este caso, añade 1 en primer lugar a la pareja $(1, 3)$, luego a la $(5, 7)$, y así sucesivamente hasta llegar a la $(4k - 3, 4k - 1)$. De esta manera, consigue que cada uno de los números pares menores o iguales que n esté escrito dos veces en la pizarra. De esta manera, elige la pareja $(2, 2)$ y le suma $n - 2$, a la $(4, 4)$ le suma $n - 4$ y así hasta llegar a la $(n - 2, n - 2)$, a la que le suma 2. Así consigue que todos los números escritos en la pizarra sean iguales a n.

(iii) Sea ahora $n = 4k + 2$. La suma de los números escritos en la pizarra inicialmente es impar, porque

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (2k+1)(4k+3).$$

Además, en cada paso la suma de todos los números se incrementa por un número par. Sin embargo, dado que hay un número par de números en la pizarra, si todos fuesen iguales la suma sería un número par, lo cual no es posible dado que hemos visto que la suma siempre será impar.

Por tanto, María puede conseguir todos los números salvo aquellos que no sean de la forma $4k + 2$, donde $k \geq 1$ es un número entero positivo.

Problema 3. Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 \\ b^2 + b &= c^2 \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$. Probar que $(a, b, -c)$ es local.

Solución.

(a) Sumando las tres ecuaciones obtenemos que $a + b + c = 0$. La primera ecuación se puede reescribir entonces como

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = -a = b + c,$$

y de forma análoga

$$(b-c)(b+c) = c + a, \quad (c-a)(c+a) = a + b.$$

Notemos que $a + b$, $b + c$ y $c + a$ son diferentes de 0, ya que coinciden con $-c$, $-a$ y $-b$, respectivamente. Multiplicando las tres ecuaciones y dividiendo por $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$, llegamos a

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 1.$$

(b) Consideremos el triángulo $A_1A_3A_4$, en el que $\angle A_3A_1A_4 = 20°$, $\angle A_1A_4A_3 = 40°$, $\angle A_4A_3A_1 = 120°$ y $|A_1A_4| = 1$. Aplicando el teorema del seno, obtenemos que

$$a = \frac{2\sin 20°}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad b = \frac{2\sin 40°}{\sqrt{3}}.$$

Procediendo de forma similar en $A_1A_4A_5$, donde $\angle A_4A_1A_5 = 20°$, $\angle A_1A_5A_4 = 60°$, $\angle A_5A_4A_1 = 100°$, se tiene que

$$c = \frac{2\sin 80°}{\sqrt{3}}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, la igualdad $a^2 + a = b^2$ es equivalente a demostrar que

$$\sqrt{3}\sin 20^\circ = 2(\sin 40^\circ - \sin 20^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ).$$

Esta igualdad se sigue de las fórmulas para la suma y la resta de senos:

$$\begin{aligned}\sin 40^\circ + \sin 20^\circ &= 2\sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ,\\ \sin 40^\circ - \sin 20^\circ &= 2\cos 30^\circ \sin 10^\circ = \sqrt{3}\sin 10^\circ.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$2(\sin 40^\circ - \sin 20^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) = \sqrt{3}\cdot 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ = \sqrt{3}\sin 20^\circ,$$

donde hemos usado la fórmula del ángulo doble.

Las otras dos igualdades se prueban de forma totalmente análoga.

Solución alternativa del epígrafe (b). Las igualdades $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = (-c)^2$ y $(-c)^2 + (-c) = a^2$ se pueden obtener aplicando el teorema de Ptolomeo a los siguientes cuadriláteros.

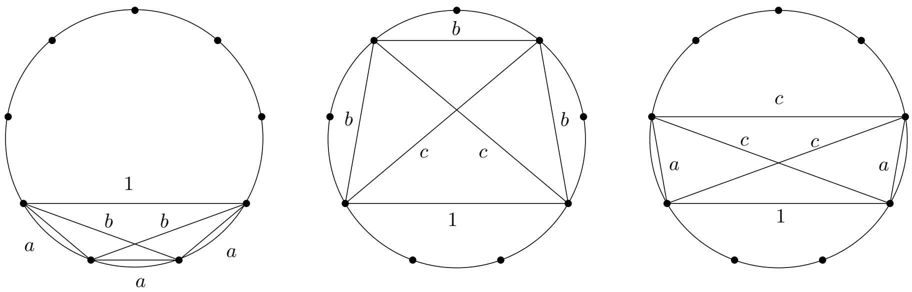

Figura 1: Esquema para la solución alternativa del Problema 3

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 4 o 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Solución. Demostraremos que $\angle GHI = \angle GFE$, que es suficiente para concluir. Comenzamos observando que

$$\angle GFE = \angle GAE = \angle GCI,$$

donde la primera igualdad de sigue del hecho que $AFGE$ es un cuadrilátero cíclico y la segunda del paralelismo de AE y CI. Si demostramos que $GHCI$ es cíclico, tendremos automáticamente que $\angle GCI = \angle GHI$. Ahora bien, esto es consecuencia de las igualdades

$$\angle HGI = \angle EGF = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD,$$

que son automáticas dado que $AFGE$ es cíclico y $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 5 o 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Solución. Si $z = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, entonces

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \frac{1}{z} - 1.$$

Si A es el conjunto de números en la pizarra, entonces la cantidad

$$\prod_{x \in A} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

no cambia durante todo el proceso (es un invariante). Inicialmente, este valor es 2022!. Por tanto, si al final del proceso únicamente queda el número x en la pizarra, entonces $\dfrac{1}{x} = 2022! + 1$, y por tanto $x = \dfrac{1}{2022! + 1}$.

Problema 6 o 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Solución. Vamos a demostrar que las únicas soluciones son las ternas $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$. Distinguiremos tres casos según el valor de a.

- Si $a = 1$, la ecuación se puede escribir como $7^b = c^2 + 2$. Observemos que si b es par, el lado izquierdo siempre es un múltiplo de 8 más uno, esto es,

  $$7^{2k} = 49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{8},$$

  donde se ha usado que $49 \equiv 1 \pmod{8}$; si k es impar, el lado izquierdo es un múltiplo de 8 más siete, es decir,

  $$7^{2k+1} = 7^{2k} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{8}.$$

  Por tanto, los restos posibles del lado izquierdo módulo 8 son 1 y 7. En lo que se refiere al lado derecho, si c es impar, el resto al dividir por 8 es 3; y si es par puede ser 2 o 6. En cualquier caso, nunca es posible que se dé la igualdad.

- Si $a = 2$, la ecuación se reescribe como $7^b = c^2$. De aquí tenemos que $c = 7^t$, y sustituyendo nos queda que $b = 2t$. Por tanto, las ternas de la forma $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$ son solución, y son las únicas con $a = 2$.

- Si $a \geq 3$, la ecuación se reescribe módulo 8 como

  $$7^b \equiv c^2 + 4 \pmod{8}.$$

  El lado izquierdo da como resto 1 o 7, mientras que el derecho puede ser 5, 4 o 0. Por tanto, nunca hay igualdad.