¿Las ideas felices nacen o se hacen?

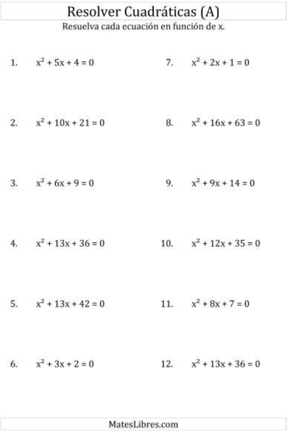
Sesión introductoria

José M. Manzano
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén

13 de enero de 2023

¿Qué son las matemáticas?

Ejercicios



Resolver Cuadráticas (A)

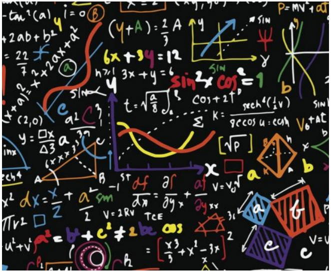
Resuelva cada ecuación en función de x.

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $x^2 + 10x + 21 = 0$
3. $x^2 + 6x + 9 = 0$
4. $x^2 + 13x + 36 = 0$
5. $x^2 + 13x + 42 = 0$
6. $x^2 + 3x + 2 = 0$
7. $x^2 + 2x + 1 = 0$
8. $x^2 + 16x + 63 = 0$
9. $x^2 + 9x + 14 = 0$
10. $x^2 + 12x + 35 = 0$
11. $x^2 + 8x + 7 = 0$
12. $x^2 + 13x + 36 = 0$

MatesLibres.com

(son cuestiones tras una explicación)

Problemas



- No sabemos qué tendremos que usar.
- Pueden dar lugar a ideas y técnicas nuevas.

¿Cómo se nos ocurren las ideas si no nos las han enseñado? ¿Se entrenan?

Problema 1

Encuentra las soluciones enteras de la ecuación

$$x + xy + y = 12.$$

Solución.

Tenemos que

$$(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = 12 + 1 = 13,$$

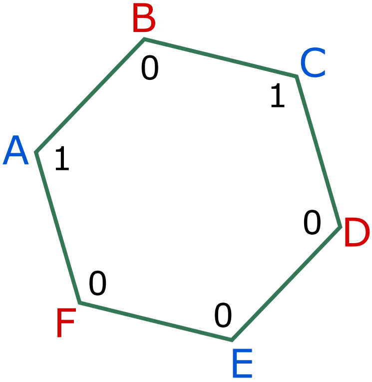
lo que nos da cuatro soluciones:

$x+1$	$y+1$	x	y
1	13	0	12
13	1	12	0
-1	-13	-2	-14
-13	-1	-14	-2

□

Problema 2

En los vértices de un hexágono se escriben los números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ consecutivamente. Se puede sumar cualquier número a dos vértices consecutivos tantas veces como se quiera. ¿Es posible hacer que todos los números sean iguales?



Solución.

La siguiente suma

$$A - B + C - D + E - F$$

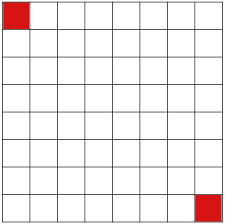
no cambia al sumar un número a dos vértices consecutivos.

Queremos que cambie de 2 a 0, luego la respuesta es NO. $\square$

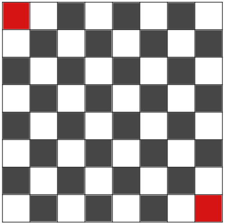
Problema 3

En un tablero 8×8 se eliminan dos esquinas opuestas. ¿Es posible rellenar el resto de casillas usando fichas de dominó 2×1?

Original:



Coloreado:



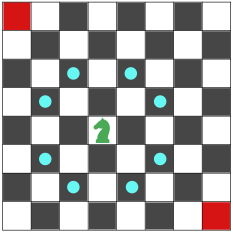
Solución.

Cada ficha 2×1 ocupa una casilla negra y una casilla blanca.

Como hay más casillas blancas (32) que negras (30), deducimos que la respuesta es NO. $\square$

Problema 4

En un tablero de ajedrez, se eliminan dos esquinas opuestas. ¿Es posible recorrer las casillas restantes a salto de caballo sin pasar dos veces por la misma casilla?

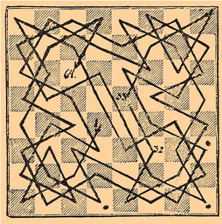


Solución.

Un caballo va saltando alternativamente entre casillas blancas y negras.

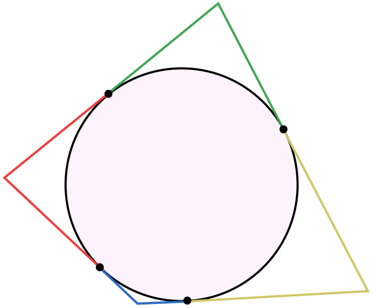
Como hay 2 casillas más blancas (32) que negras (30), deducimos que la respuesta es NO. □

Con esquinas sí que es posible:



Problema 5

Los lados de un cuadrilátero miden 4, 6, 7 y 8 unidades en cierto orden. ¿Existe una circunferencia tangente a todos sus lados?



Solución.

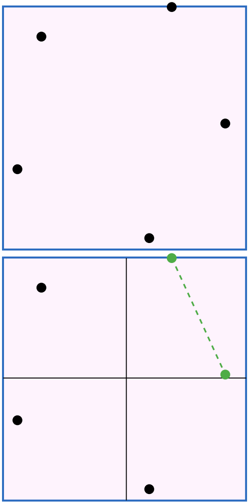
Si existe dicha circunferencia:

1. El cuadrilátero es convexo.
2. Los lados opuestos suman lo mismo.

Como sólo uno de los números es impar, un par de lados opuestos tiene suma par y otro impar, luego la respuesta es NO. □

Problema 6

Se eligen 5 puntos en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demostrar que al menos dos de ellos están a distancia menor que 0.75.



Solución.

Si subdividimos en 4 cuadrados de lado $\frac{1}{2}$, al menos uno de ellos contendrá dos puntos.

Estos dos puntos están a distancia menor que la diagonal del cuadrado, que es

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 < 0.75,$$

luego estos dos puntos cumplen la condición deseada. □

Problema 7

Demostrar que para cualesquiera números reales x, y, z se cumple la desigualdad
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

Solución.

Observamos que

$$\begin{aligned}(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz),\end{aligned}$$

luego este último termino es mayor o igual que cero (es suma de cuadrados) y tenemos la desigualdad del enunciado. $\square$

Problema 8

Halla todas las formas de escribir 2023 como suma de los cuadrados de dos números enteros.

Solución.

Queremos resolver $2023 = a^2 + b^2$. Restos al dividir entre 4:

a	a^2
$4k$	$16k^2 = 4m$
$4k+1$	$16k^2 + 8k + 1 = 4m + 1$
$4k+2$	$16k^2 + 16k + 4 = 4m$
$4k+3$	$16k^2 + 24k + 9 = 4m + 1$

Por tanto, al sumar $a^2 + b^2$ sólo podemos obtener números de la forma $4m$, $4m+1$ y $4m+2$, pero no $4m+3$.

Como $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, deducimos que no hay ninguna solución. □

Problema 9

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(f(n)) = n + 1.$$

Solución.

Calculamos $f(f(f(n)))$ de dos formas distintas:

$$f(f(f(n))) = f(n+1), \qquad f(f(f(n))) = f(n) + 1.$$

Así, tenemos que $f(n+1) = f(n) + 1$, luego $f(n) = f(0) + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo esta función en la condición del enunciado:

$$n + 1 = f(f(n)) = f(f(0) + n) = f(0) + f(0) + n = 2f(0) + n,$$

lo que nos dice que $f(0) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Deducimos que no hay ninguna función cumpliendo la ecuación. $\square$

Problema 10

Nueve personas se sientan en una mesa redonda cuatro veces. ¿Pueden hacerlo de forma que ninguna vez se sienten al lado de la misma persona?

Solución.

SÍ. Una forma de hacerlo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Primera sentada: } & 1-2-3-4-5-6-7-8-9 \\
\text{Segunda sentada: } & 1-3-5-7-9-4-6-2-8 \\
\text{Tercera sentada: } & 1-4-7-3-8-5-2-9-6 \\
\text{Cuarta sentada: } & 1-5-9-3-6-8-4-2-7
\end{aligned}$$

$\square$

Técnicas para la preparación

- Resuelve muchos problemas.

  Busca problemas del nivel adecuado (la mayoría no te saldrán).

- Escribe tus ideas.

  Aprende a saber qué (no) tienes que explicar y cómo hacerlo.

- Lee soluciones.

  Pero primero intenta los problemas (más de una vez).

- Recopila recursos.

  Cada problema sirve para que los siguientes resulten más sencillos.

- No se puntúa en negativo.

  Prueba sin miedo y analiza casos particulares. Conjetura.

- ¡Diviértete!