Seminario Olimpiada Matemática Española 2023.

Polinomios

Samuel Gómez Moreno

Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén

Jaén, 2023

Stay humble, work hard, be kind.

Estructura de este Seminario

1. Nociones teóricas de interés
   - Raíces de polinomios. Factorización
   - Fórmulas de Viète
   - Teorema Fundamental del Álgebra
   - Polinomios Recíprocos. Polinomios Simétricos
2. Problemas para trabajar en clase
3. Problemas para pensar en casa

BIBLIOGRAFÍA

1. A. Engel, *Problem–Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Equations and Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 2000.

Polinomios en una variable

Definición

Fijado un entero no negativo n, llamamos polinomio de grado n en la variable x a la función p definida mediante

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde:

i) los coeficientes a_j son números de un cierto conjunto (que suele ser $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$); a_0 se llama término independiente, y a_n se llama coeficiente líder,

ii) $a_n \neq 0$, para que el *grado preciso* del polinomio sea n (escribimos $\deg(p) = n$),

iii) y donde convenimos que el polinomio idénticamente igual a 0 ($p = 0$) tiene grado $-\infty$.

¿Qué tienen de interesante los polinomios?

¿Qué tienen de interesante los polinomios?

- Fáciles de evaluar (se requiere tan solo un número finito de sumas y productos), de derivar y de integrar.

¿Qué tienen de interesante los polinomios?

- Fáciles de evaluar (se requiere tan solo un número finito de sumas y productos), de derivar y de integrar.
- Aproximan funciones interpolando datos de la misma.

¿Qué tienen de interesante los polinomios?

- Fáciles de evaluar (se requiere tan solo un número finito de sumas y productos), de derivar y de integrar.
- Aproximan funciones interpolando datos de la misma.
- Aproximan localmente (es decir, en puntos concretos) muchas de las funciones importantes. Por ejemplo:

$$e^{x_0} \approx 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + \cdots + \frac{x_0^m}{m!}.$$

¿Qué tienen de interesante los polinomios?

- Fáciles de evaluar (se requiere tan solo un número finito de sumas y productos), de derivar y de integrar.
- Aproximan funciones interpolando datos de la misma.
- Aproximan localmente (es decir, en puntos concretos) muchas de las funciones importantes. Por ejemplo:

$$e^{x_0} \approx 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + \cdots + \frac{x_0^m}{m!}.$$

- Aproximan uniformemente (es decir, sobre intervalos) a las funciones que son continuas en intervalos cerrados y acotados (Teorema de Weierstrass, 1885).

Igualdad, suma y producto de polinomios

- Dos polinomios son iguales cuando tanto sus grados como sus coeficientes coinciden.

Igualdad, suma y producto de polinomios

- $\deg(p \pm q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$. El resultado de sumar dos polinomios del mismo grado puede ser un polinomio de grado menor ¿un ejemplo?

Igualdad, suma y producto de polinomios

- $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.
  - Si $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces $p^2(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} \right) x^k$.
  - $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, con $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ y $0! = 1$.
  - $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ (k_j \geq 0)}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j}$,

    donde $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$.

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \quad \text{con} \quad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \quad \text{con} \quad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Ejemplo:

$$x^5 + 3x^2 - 2 = (x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 2x) + (2x - 2).$$

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \qquad \text{con} \qquad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

$$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \qquad \text{con} \qquad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

$$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - (Teorema del Resto.) $p(a) = r$, o bien

$$p(x) = (x - a)c(x) + p(a).$$

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \quad \text{con} \quad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

$$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - a es raíz de p (i.e., $p(a) = 0$) si y solo si $p(x) = (x - a)c(x)$.
    En tal caso decimos que $x - a$ divide a $p(x)$. (Geométricamente, las raíces reales de un polinomio son puntos de corte del polinomio con el eje horizontal.)

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \qquad \text{con} \qquad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

$$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - Si a_1 y a_2 son dos raíces distintas de p, entonces $p(x) = (x - a_1)c_1(x)$, con $c_1(a_2) = 0$, de modo que $c_1(x) = (x - a_2)c_2(x)$, o bien $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)c_2(x)$.

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \qquad \text{con} \qquad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

$$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - Si $\deg(p) = n$ y a_1, $a_2, \ldots$, a_n son raíces distintas dos a dos de p, entonces $p(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, donde $c \in \mathbb{R}$.

División de polinomios

Dados dos polinomios p, q, no nulos y de grados arbitrarios, existen polinomios c y r tales que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x), \quad \text{con} \quad \deg(r) < \deg(q). \tag{1}$$

(Si fuera $\deg(q) = 0$, entonces $r = 0$.)

- Un caso de especial interés: división por $(x - a)$
  Tomando en (1) $q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{R}$, queda:

  $$p(x) = (x - a)c(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

  - Se dice que una raíz a del polinomio p tiene multiplicidad m (m un entero positivo) si $p(x) = (x - a)^m c(x)$, donde c es un polinomio con $c(a) \neq 0$. (Se habla también de raíces simples, dobles, triples,. . . , según sea $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, ...)

Raíces de polinomios con coeficientes enteros (I)

Teorema

De tener alguna, las raíces enteras de un polinomio p con coeficientes enteros son divisores enteros del término independiente.

Demostración

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_k \in \mathbb{Z}$. Si existe $r \in \mathbb{Z}$ con $p(r) = 0$ (r es una raíz entera de p), entonces

$$a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0,$$
$$(a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \cdots + a_1)r = -a_0,$$

y como $a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \cdots + a_1 \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$, y $-a_0 \in \mathbb{Z}$, entonces r es un divisor (entero) de a_0.

Raíces de polinomios con coeficientes enteros (II)

Teorema

Las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente líder igual a 1 son, necesariamente, enteras.

Demostración

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_k \in \mathbb{Z}$. Si existe r/s racional irreducible con $p(r/s) = 0$, entonces

$$0 = \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + a_{n-2}\frac{r^{n-2}}{s^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{r}{s} + a_0,$$

$$-\frac{r^n}{s} = a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2}s + \cdots + a_1 r\, s^{n-2} + a_0 s^{n-1}.$$

Al ser entero el miembro derecho de la última ecuación, y como r y s son coprimos ($\gcd(r,s) = 1$), debe ser $s = 1$, de donde $\frac{r}{s} = r \in \mathbb{Z}$.

Raíces de polinomios con coeficientes enteros (III)

BRICOTALLER DIY

Teorema

Sean r y s dos enteros con $s \neq 0$ y r y s coprimos, es decir $\gcd(r, s) = 1$. Si el racional irreducible r/s es raíz de un polinomio (no necesariamente mónico) con coeficientes enteros, entonces ...

Demostración

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_k \in \mathbb{Z}$. Si existe r/s (racional irreducible) con $p(r/s) = 0$, entonces ...

Algunas factorizaciones importantes

Algunas factorizaciones importantes

- $x^{2n} - y^{2n}$

$$= (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots)$$

$$= (x-y)(x+y)(x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{n} + y^2)(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{n} + y^2)\cdots(x^2 - 2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + y^2).$$

Algunas factorizaciones importantes

- $x^{2n+1} - y^{2n+1}$

$$= (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + x^2 y^{2n-2} + x\,y^{2n-1} + y^{2n})$$

$$= (x-y)(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2)(x^2 - 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2)\cdots(x^2 - 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2).$$

Algunas factorizaciones importantes

- $x^{2n+1} + y^{2n+1}$

$$= (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + x^2y^{2n-2} - x\,y^{2n-1} + y^{2n})$$

$$= (x+y)(x^2+2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1}+y^2)(x^2+2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1}+y^2)\cdots(x^2+2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+y^2).$$

Algunas factorizaciones importantes

- $x^{2n} + y^{2n}$

$$= (x^2 + 2xy\cos\frac{\pi}{2n} + y^2)(x^2 + 2xy\cos\frac{3\pi}{2n} + y^2)\cdots(x^2 + 2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2).$$

Algunas factorizaciones importantes

- (Identidad de Sophie Germain)

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2x\,y + 2y^2)(x^2 - 2x\,y + 2y^2).$$

Fórmulas de Viète

Teorema

Si r_1, r_2,...,r_n son raíces distintas del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2}$$

entonces cada uno de los coeficientes a_k de p depende de las raíces r_j. La dependencia explícita concreta

$$a_k = a_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

se obtiene desarrollando

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) \tag{3}$$

y comparando los coeficientes en (3) y (2).

Fórmulas de Viète

Fórmulas de Viète para polinomios cuadráticos

Si r_1 y r_2 son dos raíces de $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$, entonces

$$p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2,$$

de donde

$$\begin{aligned} a_1 &= -(r_1 + r_2), \\ a_0 &= r_1 r_2. \end{aligned}$$

Fórmulas de Viète

Fórmulas de Viète para polinomios cúbicos

Sean ahora r_1, r_2 y r_3 tres raíces de $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Como

$$\begin{aligned} p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} a_2 &= -(r_1 + r_2 + r_3), \\ a_1 &= r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1, \\ a_0 &= -r_1r_2r_3. \end{aligned}$$

Fórmulas de Viète

Fórmula general de Viète. Polinomios simétricos elementales

Si r_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son n raíces del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

entonces

$$\begin{aligned} p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= \prod_{k=1}^{n}(x - r_k) \\ &= x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} e_{n-1} x + (-1)^n e_n, \end{aligned}$$

donde las funciones $e_k = e_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ se llaman polinomios simétricos elementales y están definidos mediante

$$e_k(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \prod_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_k}.$$

Fórmulas de Viète

Fórmula general de Viète. Polinomios simétricos elementales. Ejemplo

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4) \\ &= x^4 - e_1x^3 + e_2x^2 - e_3x + e_4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1(r_1, r_2, r_3, r_4) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \\ e_2 &= e_2(r_1, r_2, r_3, r_4) = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4, \\ e_3 &= e_4(r_1, r_2, r_3, r_4) = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4, \\ e_4 &= e_5(r_1, r_2, r_3, r_4) = r_1r_2r_3r_4. \end{aligned}$$

Polinomios con coeficientes complejos

Teorema Fundamental del Álgebra

Fijado $n \geq 1$, todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes complejos $a_k \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$ tiene, al menos, una raíz en $\mathbb{C}$. Como consecuencia,

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \qquad r_i \in \mathbb{C},$$

donde los r_i no son necesariamente distintos.

Conjuntos numéricos. El final de una historia

Moraleja

Los conjuntos numéricos se han ido ampliando para que las ecuaciones algebraicas con coeficientes en dichos conjuntos tengan solución (en esos mismos conjuntos):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

. . . y el cuento termina con $\mathbb{C}$, ya que toda ecuación algebraica con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene solución en $\mathbb{C}$.

Factorización completa de polinomios con coeficientes reales

Teorema

Las raíces complejas de los polinomios con coeficientes reales aparecen en pares conjugados. En otras palabras, si p es un polinomio con coeficientes reales y $r = \alpha + i\beta$ es una raíz de p, entonces $\overline{r} = \alpha - i\beta$ también es raíz de p (la demostración es súper-simple y usa propiedades básicas de los números complejos).

Como consecuencia importante observamos que cada raíz compleja $r = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ de p induce, en la descomposición de p, el factor irreducible

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Factorización completa de polinomios con coeficientes reales

Teorema

Si p es un polinomio con coeficientes reales, entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_j)^{m_j}((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \cdots ((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k},$$

donde r_i son las raíces reales (de multiplicidad m_i) y $\alpha_j \pm i\beta_j$ son los pares de raíces complejas conjugadas (de multiplicidad p_j).

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Definición

El polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ se llama recíproco si $a_{n-i} = a_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ (es decir, si $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, …).

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Definición

El polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ se llama recíproco si $a_{n-i} = a_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ (es decir, si $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, ...).

Ejemplos

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^n + 1, \\ p_2(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2, \\ p_3(x) &= 4x^8 + 5x^7 - 3x^6 + x^4 - 3x^2 + 5x + 4. \end{aligned}$$

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Definición

Una ecuación algebraica $p(x) = 0$ se llama recíproca si p es un polinomio recíproco.

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Definición

Una ecuación algebraica $p(x) = 0$ se llama recíproca si p es un polinomio recíproco.

Ejemplos

$$\begin{aligned} x^n + 1 &= 0, \\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 &= 0, \\ 4x^8 + 5x^7 - 3x^6 + x^4 - 3x^2 + 5x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Teorema

Si p es un polinomio recíproco de grado $2n$, entonces

$$p(x) = x^n q(z),$$

donde q es un polinomio de grado n y donde $z = x + \frac{1}{x}$.

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Teorema

Si p es un polinomio recíproco de grado $2n$, entonces

$$p(x) = x^n q(z),$$

donde q es un polinomio de grado n y donde $z = x + \frac{1}{x}$.

Demostración (Primera Parte) Al ser p recíproco y de grado $2n$, tenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= x^n \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \\ &= x^n \left(a_0 \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + a_1 \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) + \cdots + a_{n-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_n \right). \end{aligned}$$

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Teorema

Si p es un polinomio recíproco de grado $2n$, entonces

$$p(x) = x^n q(z),$$

donde q es un polinomio de grado n y donde $z = x + \frac{1}{x}$.

Demostración (Segunda Parte) Ahora nos fijamos que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = z^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3 - 3z,$$

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Teorema

Si p es un polinomio recíproco de grado $2n$, entonces

$$p(x) = x^n q(z),$$

donde q es un polinomio de grado n y donde $z = x + \frac{1}{x}$.

Demostración (Segunda Parte. Continuación) Y en general, como

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

es claro que $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un polinomio de grado n en z.

Polinomios y Ecuaciones Recíprocas

Teorema

Si p es un polinomio recíproco de grado $2n$, entonces

$$p(x) = x^n q(z),$$

donde q es un polinomio de grado n y donde $z = x + \dfrac{1}{x}$.

Demostración (Conclusión) Reuniendo todo, escribimos

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n \left(a_0 \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + a_1 \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) + \cdots + a_{n-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_n \right) \\ &= x^n \left(a_0 p_n(z) + a_1 p_{n-1}(z) + \cdots + a_{n-1} p_1(z) + a_n \right), \end{aligned}$$

donde $p_0(z) = 2$, $p_1(z) = z$ y $p_{n+1}(z) = z\, p_n(z) - p_{n-1}(z)$ para $n \geq 1$.

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

Moraleja

Las raíces de una ecuación recíproca de grado par se pueden calcular resolviendo una ecuación de grado n (lo cual, obviamente, resulta muy conveniente).

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

Ejemplo: $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = x^2\left(2x^2 - 9x + 14 - 9\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x^2\left(2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14\right).$$

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = x^2\left(2x^2 - 9x + 14 - 9\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x^2\left(2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14\right).$$

Llamando $z = x + \frac{1}{x}$, y fijándonos que $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ nos queda

$$0 = x^2\left(2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14\right)$$
$$= x^2(2(z^2 - 2) - 9z + 14) = x^2(2z^2 - 9z + 10).$$

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

$$0 = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = x^2\left(2x^2 - 9x + 14 - 9\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= x^2\left(2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14\right).$$

Llamando $z = x + \frac{1}{x}$, y fijándonos que $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ nos queda

$$0 = x^2\left(2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14\right)$$
$$= x^2(2(z^2 - 2) - 9z + 14) = x^2(2z^2 - 9z + 10).$$

Como $x = 0$ no es una raíz, resolvemos $2z^2 - 9z + 10 = 0$ y obtenemos $z = 2$ y $z = 5/2$.

Un Ejemplo de Ecuación Recíproca

Recordando que $z = x + \dfrac{1}{x}$, solo queda resolver las dos ecuaciones

$$x + \frac{1}{x} = 2,$$
$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

que dan las soluciones $x = 1$ (doble) – la primera ecuación –, y $x = 2$, $x = 1/2$ – la segunda –. Por tanto

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 2(x-1)^2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Propiedades de las Ecuaciones Recíprocas

Propiedades de las Ecuaciones Recíprocas

- Un polinomio p de grado n es recíproco si y solo si

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x).$$

Propiedades de las Ecuaciones Recíprocas

- Un polinomio p de grado n es recíproco si y solo si

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x).$$

- Si r es una raíz de la ecuación recíproca $p(x) = 0$, entonces $\dfrac{1}{r}$ es también raíz de dicha ecuación. (¿Por qué es $r \neq 0$?)

Propiedades de las Ecuaciones Recíprocas

- Un polinomio p de grado n es recíproco si y solo si

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x).$$

- Si r es una raíz de la ecuación recíproca $p(x) = 0$, entonces $\dfrac{1}{r}$ es también raíz de dicha ecuación. (¿Por qué es $r \neq 0$?)
- Todo polinomio recíproco de grado impar es divisible por $(x + 1)$ y el cociente es un polinomio recíproco de grado par.

Polinomios Simétricos

Definición

Un polinomio de dos variables $p = p(x, y)$ se llama simétrico si

$$p(x, y) = p(y, x).$$

Polinomios Simétricos

Definición

Un polinomio de dos variables $p = p(x, y)$ se llama simétrico si

$$p(x, y) = p(y, x).$$

Ejemplos

1. Polinomios simétricos elementales

$$\sigma_1(x, y) = x + y, \qquad \sigma_2(x, y) = xy.$$

2. Suma de potencias

$$s_n(x, y) = x^n + y^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Propiedades de los Polinomios Simétricos

Todo polinomio simétrico en las variables x, y se puede representar como un polinomio en las variables σ_1, σ_2, donde

$$\sigma_1 = \sigma_1(x, y) = x + y, \qquad \sigma_2 = \sigma_2(x, y) = xy.$$

En otras palabras, cualquier polinomio simétrico (en dos variables) se puede representar en términos de los polinomios simétricos elementales.

Demostración

En efecto, en primer lugar:

$$\begin{aligned} s_n = x^n + y^n &= (x+y)(x^{n-1}+y^{n-1}) - xy(x^{n-2}+y^{n-2}), \\ &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}, \qquad n \geq 2, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la recursión

$$s_0 = 2, \qquad s_1 = \sigma_1, \qquad s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

de modo que para cada $n \geq 0$ obtenemos $s_n = s_n(\sigma_1, \sigma_2)$. Tenemos

$$\begin{aligned} s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2, \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \end{aligned}$$

Demostración

Y en segundo lugar:

- si $i = j$, entonces $x^i y^i = (xy)^i = \sigma_2^i$,
- y si $i < j$, entonces, usando que $s_n = s_n(\sigma_1, \sigma_2)$ obtenemos

$$x^i y^j + x^j y^i = x^i y^i (y^{j-i} + x^{j-i}) = \sigma_2^i s_{j-i} = \sigma_2^i s_{j-i}(\sigma_1, \sigma_2).$$

- Un polinomio simétrico en x e y tiene términos de la forma $x^i y^i$ (que hemos visto que se escriben como una potencia de σ_2), y términos de la forma $ax^i y^j$ $(i \neq j)$, junto con su "correspondiente" $ax^j y^i$ (por ese "asunto de la simetría"); como hemos visto que $x^i y^j + x^j y^i$ puede escribirse como un polinomio en σ_1 y σ_2, esto prueba finalmente que los polinomios simétricos pueden representarse en términos de los polinomios simétricos elementales.

Un Ejemplo de Aplicación

EJERCICIO: Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 3, \\ x^5+y^5 & = & 33. \end{array} \right.$$

Un Ejemplo de Aplicación

EJERCICIO: Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 3, \\ x^5+y^5 & = & 33. \end{array} \right.$$

Usando las nuevas variables $\sigma_1 = x+y$ y $\sigma_2 = xy$ resulta (usando que $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & 3, \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 & = & 33. \end{array} \right.$$

Reemplazando σ_1 por 3 en la segunda ecuación, se obtiene $3^5 - 5\cdot 3^3\sigma_2 + 5\cdot 3\sigma_2^2 = 33$, que resolviendo da $\sigma_2 = 2$ y $\sigma_2 = 7$. Entonces, de $\sigma_1 = x+y = 3$, $\sigma_2 = xy = 2$ resulta $(x, y) = (1, 2)$ y $(x, y) = (2, 1)$. Se procede del mismo modo con $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 7$.

Problemas para trabajar en el seminario

- Calcular $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$.
- Sean a, b, c números reales distintos dos a dos. Dado el polinomio
$$p(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$
obtener el valor $p((a^2+b^2+c^2)^2)$.
- Factorizar a^4+b^4.
- Deducir la identidad de Sophie Germain
$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
- Probar que si n es un entero mayor que 1 entonces n^4+4^n no es primo.
- ¿Es 3^8+64^3 un número primo?

Problemas para trabajar en el seminario

- Factorizar x^8+98x^4+1 como producto de polinomios con coeficientes enteros.
- Encontrar todas las soluciones (x,y) reales de $y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0$.
- ¿Es posible que cada uno de los polinomios $p_1(x)=ax^2+bx+c$, $p_2(x)=cx^2+ax+b$, $p_3(x)=bx^2+cx+a$ tenga dos raíces reales distintas?
- Calcular a sabiendo que una de las raíces de $p(x)=x^3+2x^2+2x+a$ es la suma de las otras dos raíces.
- Calcular la relación entre a, b y c sabiendo que una de las raíces de $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la suma de las otras dos raíces.

Problemas para trabajar en el seminario

- Sabiendo que la suma de dos de las raíces de $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es igual a la suma de las otras dos raíces, verificar que $a^3 - 4ab + 8c = 0$.
- Calcular $(1 - x + x^2 - \cdots + x^{2015} - x^{2016})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2015} + x^{2016})$.
- Obtener el coeficiente de x^4 para el polinomio $p(x) = (1 + x)^6 + (1 - x)^6 - (1 + x^2)^3$.
- Sabiendo que el polinomio $p(x) = x^3 + ax + b$ tiene tres raíces distintas, demostrar que $a < 0$.

Problemas para trabajar en casa

- Si r_1, r_2 son las raíces de $x^2 + ax + bc = 0$, y r_2, r_3 son las raíces de $x^2 + bx + ca = 0$, donde $ac \neq bc$, probar que r_1, r_3 son las raíces de $x^2 + cx + ab = 0$.
- Fijado un entero positivo n, demostrar que se puede construir un triángulo rectángulo con catetos de longitudes $a = 2n + 1$ y $b = 2n^2 + 2n$, y cuya hipotenusa tiene una longitud que es también un número entero.
- Para un entero positivo n arbitrario, encontrar los coeficientes de los polinomios
  - $p(x) = (1 + x)^{2k} + (1 - x)^{2k} - (1 + x^2)^k$,
  - $q(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^{k-1}})$.
- Encontrar todos los polinomios p que verifican que $p(x - 1) + 2p(x + 1) = 3x^2 - 7x$.

Problemas para trabajar en casa

- Mostrar que para números reales no nulos a, b, las raíces r_i del polinomio $p(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$ verifican la condición

$$(r_1 + r_2 + r_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = -1.$$

- Encontrar, en cada caso, números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que
  - $(x^2 - 1)|ax^4 + bx^3 + 1$,
  - $(x - 1)^2|ax^4 + bx^3 + 1$.
- (Difícil) Los coeficientes del polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son enteros y tales que ad es impar y bc par. Probar que al menos una raíz de p es irracional.

Problemas complementarios 3º y 4º E.S.O.

- Hallar el valor de m sabiendo que la ecuación

$$\frac{x^2 - bx}{ax + c} = \frac{m-1}{m+1}$$

  tiene soluciones opuestas r y $-r$, con $r \neq 0$.

- Si r_1, r_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, calcular $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2}$ en términos de a, b, y c.
- Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $(x^2 - 1)$ el resto es $4x + 4$. ¿Cuál es el resto de dividir $p(x)$ entre $(x - 1)$?
- El polinomio $p(x) = ax^3 - 60x^2 + bx - 125$ es el cubo de un binomio. ¿Cuánto es ab?

(Extraídos de un libro de texto de SM de la colección Savia.)