PROBLEMAS SOBRE POLINOMIOS

Samuel G. Moreno
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén
samuel@ujaen.es

1. PARA TRABAJAR EN EL SEMINARIO

1. Calcular $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$.
2. Sean a, b, c números reales distintos dos a dos. Dado el polinomio
$$p(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$
obtener el valor $p((a^2+b^2+c^2)^2)$.
3. Factorizar a^4+b^4.
4. Deducir la identidad de Sophie Germain $a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
5. Probar que si n es un entero mayor que 1 entonces n^4+4^n no es primo.
6. ¿Es 3^8+64^3 un número primo?
7. Factorizar x^8+98x^4+1 como producto de polinomios con coeficientes enteros.
8. Encontrar todas las soluciones (x,y) reales de $y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0$.
9. ¿Es posible que cada uno de los polinomios $p_1(x)=ax^2+bx+c$, $p_2(x)=cx^2+ax+b$, $p_3(x)=bx^2+cx+a$ tenga dos raíces reales distintas?
10. Calcular a sabiendo que una de las raíces de $p(x)=x^3+2x^2+2x+a$ es la suma de las otras dos raíces.
11. Calcular la relación entre a, b y c sabiendo que una de las raíces de $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la suma de las otras dos raíces.
12. Sabiendo que la suma de dos de las raíces de $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ es igual a la suma de las otras dos raíces, verificar que $a^3-4ab+8c=0$.
13. Calcular $(1-x+x^2-\cdots+x^{2015}-x^{2016})(1+x+x^2+\cdots+x^{2015}+x^{2016})$.
14. Obtener el coeficiente de x^4 para el polinomio $p(x)=(1+x)^6+(1-x)^6-(1+x^2)^3$.
15. Sabiendo que el polinomio $p(x)=x^3+ax+b$ tiene tres raíces distintas, demostrar que $a<0$.

2. PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS (3º Y 4º E.S.O.)

1. Hallar el valor de m sabiendo que la ecuación
$$\frac{x^2 - bx}{ax + c} = \frac{m-1}{m+1}$$
tiene soluciones opuestas r y $-r$, con $r \neq 0$.

2. Si r_1, r_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, calcular $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2}$ en términos de a, b, y c.

3. Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $(x^2 - 1)$ el resto es $4x + 4$. ¿Cuál es el resto de dividir $p(x)$ entre $(x - 1)$?

4. El polinomio $p(x) = ax^3 - 60x^2 + bx - 125$ es el cubo de un binomio. ¿Cuánto es ab?

3. PARA PENSAR EN CASA

1. Si r_1, r_2 son las raíces de $x^2 + ax + bc = 0$, y r_2, r_3 son las raíces de $x^2 + bx + ca = 0$, donde $ac \neq bc$, probar que r_1, r_3 son las raíces de $x^2 + cx + ab = 0$.

2. Fijado un entero positivo n, demostrar que se puede construir un triángulo rectángulo con catetos de longitudes $a = 2n + 1$ y $b = 2n^2 + 2n$, y cuya hipotenusa tiene una longitud que es también un número entero.

3. Para un entero positivo n arbitrario, encontrar los coeficientes de los polinomios

   a) $p(x) = (1 + x)^{2k} + (1 - x)^{2k} - (1 + x^2)^k$,

   b) $q(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^{k-1}})$.

4. Encontrar todos los polinomios p que verifican que $p(x - 1) + 2p(x + 1) = 3x^2 - 7x$.

5. Mostrar que para números reales no nulos a, b, las raíces r_i del polinomio $p(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$ verifican la condición
$$(r_1 + r_2 + r_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = -1.$$

6. Encontrar, en cada caso, números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

   a) $(x^2 - 1) | ax^4 + bx^3 + 1$,

   b) $(x - 1)^2 | ax^4 + bx^3 + 1$.

7. (Difícil) Los coeficientes del polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son enteros y tales que ad es impar y bc par. Probar que al menos una raíz de p es irracional.