Invariantes

José Miguel Manzano (jmprego@ujaen.es)

16 de febrero de 2023

Invariantes

Hay un gran número de problemas de olimpiada en los que encontramos situaciones cambiantes en las que es imposible analizar todas las posibilidades. La regla es clara: ¿qué queda *invariante*? Donde todo cambia, busca aquello que no cambia.

Problema 1. Alrededor de un círculo se colocan números, todos iguales a cero o a uno. A continuación, si dos números consecutivos son iguales se escribe entre ellos un cero, y si son distintos se escribe un uno entre ellos. Al hacer esta operación con cada par de números consecutivos, se borran los números originales. Si repetimos el proceso, ¿para qué configuraciones originales podemos llegar a que todos sean iguales a cero?

Problema 2. Determinar los valores de m y n para los que en una cuadrícula de $m \times n$ casillas existe un camino cerrado a través de las aristas que una todos los vértices sin pasar dos veces por el mismo.

Problema 3. Se escriben en la pizarra los números enteros del 1 al 2023. En cualquier momento se pueden coger dos números y sustituirlos por su suma o su diferencia. ¿Se puede llegar así a tener únicamente el cero escrito en la pizarra?

Problema 4. En un tablero de ajedrez 8×8 colocamos 24 fichas ocupando las tres filas superiores. Podemos cambiar la posición de las fichas haciendo saltar una por encima de otra a un hueco libre en cualquier dirección (horizontal, vertical o diagonal). ¿Se puede conseguir así llevar las fichas a las tres filas inferiores? (OME local 2004, problema 2)

Problema 5. En un tablero 7×7 se colocan ocho fichas. ¿Pueden elegirse siempre dos de ellas que no estén en la misma fila ni en la misma columna ni en la misma diagonal?

Problema 6. En cada una de las casillas de una cuadrícula 3×7 se coloca una ficha azul o una ficha roja. Demostrar que siempre podemos encontrar cuatro fichas del mismo color centradas en los vértices de un rectángulo.

Problema 7. Dada una lista de números reales positivos (a, b, c, d), podemos cambiarlos por la lista (ab, bc, cd, da). Si repetimos el proceso muchas veces, demostrar que no se pueden volver a obtener los números originales a menos que $a = b = c = d = 1$.

Problema 8. Dados dos números a y b, podemos sumarle a cualquiera de ellos un múltiplo del otro. Repitiendo este proceso tantas veces como queramos, ¿podemos convertir los números 46597 y 60707 en los números 52079 y 67849?

Problema 9. ¿Es posible disponer los números del 0 al 9 alrededor de una circunferencia de forma que la suma de tres números consecutivos cualesquiera sea, como mucho, (a) 13, (b) 14, (c) 15? (OME 2014, Problema 1)

Problema 10. Se disponen 2023 presos en fila india y a cada uno se le coloca un sombrero blanco o negro, de forma que cada uno ve el color de los sombreros de los presos que están delante de él en la fila (pero no el suyo ni los de quienes se encuentran detrás en la fila). Se les pregunta a todos los presos por el color de su sombrero, por orden desde el último de la fila al primero. El que acierta se salva y el que no queda en la cárcel. Mediante una estrategia adecuada pactada previamente por los presos, ¿cuál es el máximo número de presos que podemos garantizar que se salva?

Problema 11. Coloreamos nueve de las cien casillas de un tablero 10×10. En cada paso, coloreamos todas las casillas que tengan al menos dos casillas vecinas coloreadas (con las que comparten lados). Hallar todas las configuraciones iniciales para las que, después de cierto número de pasos, llegamos a colorear todas las casillas.

Problema 12. Un dispositivo electrónico con dos teclas, una roja y una amarilla, muestra en su pantalla un número entero. Al apretar la tecla roja el número n de la pantalla se reemplaza por $2n-7$ y al apretar la tecla amarilla el número n de la pantalla se reemplaza por $3n - 14$. Comenzando con $n = 77$ y después de apretar varias veces las teclas, aparece en la pantalla un número N mayor que 777777. Hallar el menor de tales números N. (OM Argentina 2014, problema 2).

Principio del palomar

Si repartimos $n + 1$ palomas en n palomares, siempre habrá un palomar con al menos dos palomas. Si repartimos $mn + a$ palomas en n palomares, siempre habrá un palomar con al menos $m + 1$ palomas.

Problema 13. ¿Se pueden colocar 7 fichas en las casillas de un tablero 4×4 de forma que no haya dos filas y dos columnas que contengan todas la fichas?

Problema 14. La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demostrar que existen 3 de ellos tales que la suma de sus edades no es menor de 51 años. (OME local 2002, problema 5)

Problema 15. Si colocamos cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, demuestra que siempre hay dos que están a distancia menor que 0,8.

Problema 16. Si colocamos nueve puntos en el interior de un cuadrado de lado 1, demuestra que siempre hay tres que son vértices de un triángulo de área menor que $\frac{1}{8}$.

Problema 17. En un tablero de ajedrez se colocan 33 torres. Demostrar que siempre podemos elegir cinco de ellas de forma que se atacan todas entre sí, y siempre podemos elegir cinco de ellas de forma que ninguna ataque a las demás.

Problema 18. Escogemos $n + 1$ enteros distintos cualesquiera entre 1 y $2n$.

(a) Demostrar que entre esos números siempre hay dos que son primos entre sí.

(a) Demostrar que entre esos números siempre uno que es múltiplo de otro.

¿Son ciertos estos resultados si solo escogemos n números?

Problema 19. En una reunión hay 201 personas de cinco nacionalidades diferentes. Si en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad, demostrar que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo. (OME 1993, problema 1)

Problema 20. Consideremos los seis vértices de un hexágono regular y coloreemos los segmentos que determinan de dos colores. Demostrar que siempre podemos encontrar tres vértices de forma que los tres lados del triángulo que determinan tienen el mismo color.

Problema 21. Si elegimos 50 números enteros distintos entre 1 y 100, probar que hay dos de ellos que se diferencian en 10 unidades, pero no tiene por qué haber dos que se diferencien en 11 unidades.

Problema 22. ¿Pueden separarse los números del 1 al 100 en doce subconjuntos de forma que cada uno de ellos esté formado por términos de una misma sucesión geométrica?

Problema 23. Un conjunto A está formado por diez números distintos de dos cifras. Demostrar que existen dos subconjuntos disjuntos de A cuyos elementos tienen la misma suma. (IMO 1972, problema 1)

Problema 24. Dado un conjunto M formado por 1985 enteros positivos, ninguno de los cuales tiene un divisor primo mayor que 23, demostrar que podemos encontrar cuatro elementos distintos en M cuya media geométrica es un entero. (IMO 1985, problema 4)