Relaciones métricas básicas en el triángulo

José Miguel Manzano (jmprego@ujaen.es)

16 de marzo de 2023

A lo largo de todo el texto, vamos a trabajar y repasar propiedades fundamentales de los elementos notables de un triángulo, por lo que conviene fijar cierta notación estándar. Denotaremos por A, B y C a los vértices del triángulo y por a, b y c a los lados opuestos a dichos vértices. Los ángulos de este triángulo los escribiremos como $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$. Denotaremos por m_a, m_b y m_c a las medianas que pasan por los vértices A, B y C, respectivamente, que se cortan en el baricentro G. Análogamente, las bisectrices v_a, v_b y v_c se cortarán en el incentro I y las alturas h_a, h_b y h_c en el ortocentro H. Los radios de la circunferencias circunscrita e inscrita serán R y r, respectivamente.

Por otro lado, denotaremos por p al semiperímetro, que no es otra cosa que la mitad del perímetro, es decir, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. El motivo de tomar el semiperímetro y no el perímetro es que las expresiones que vamos a obtener se simplifican un poco más que si tomásemos el perímetro en sí. Por otro lado, S denotará el área del triángulo, que puede calcularse como la longitud de un lado por la altura correspondiente a ese lado.

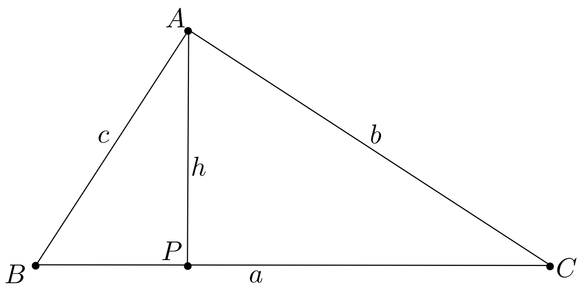
1. Triángulos rectángulos

Si suponemos que ABC es un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es $\hat{A}$ (luego a es la hipotenusa y b y c son los catetos), es interesante considerar la altura h sobre el lado a, como podemos ver en la figura 1. Observemos que, en este caso, las alturas sobre los otros dos lados no tienen mucho interés ya que coinciden con los catetos.

En esta situación, si P es el pie de la altura h, tenemos que los triángulos APC y APB son semejantes al triángulo ABC pues los tres son triángulos rectángulos y comparten otro ángulo con ABC ya que $\angle ABP = \angle ABC$ y $\angle ACP = \angle BCA$. Usando estas semejanzas, tenemos los siguientes resultados (ver la figura 1):

- **Teorema de la altura.** La altura al cuadrado es igual al producto de los segmentos que ésta determina sobre la hipotenusa.

  Para demostrarlo, observemos que de la semejanza entre APB y APC tenemos que $\frac{AP}{BP} = \frac{CP}{AP}$ luego $h^2 = AP^2 = BP \cdot CP$, que es lo que buscábamos.



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= CP \cdot a \\ h^2 &= BP \cdot CP \end{aligned}}$$

Figura 1: Teoremas de Pitágoras, del cateto y de la altura.

- **Teorema del cateto.** Un cateto al cuadrado es igual al producto de la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ésta.

  Para demostrarlo, de la semejanza entre APB y ABC tenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{BP}{AB}$, de donde $c^2 = AB^2 = BP \cdot BC = a \cdot BP$, que es lo que queríamos probar.

- **Teorema de Pitágoras.** El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

  Para demostrarlo, observemos que el teorema del cateto aplicados a los dos catetos nos dice que $b^2 = a \cdot CP$ y $c^2 = a \cdot BP$. Sumando estas dos igualdades, tenemos que $b^2 + c^2 = a(BP + CP) = a \cdot BC = a^2$, como queríamos probar.

Para entender lo que viene más adelante, es conveniente considerar las razones trigonométricas, pues esta es la única vía razonable para dar relaciones numéricas entre lados y ángulos en un triángulo. Vamos a hacer en realidad muy poco uso de ellas y en cada momento indicaremos explícitamente qué propiedades suyas se están usando.

Supongamos que tenemos un ángulo agudo β y construimos un triángulo rectángulo ABC de forma que $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = 90$ y $\angle BCA = 90 - \beta$. Definimos entonces

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}},$$

y a estas cantidades las llamaremos seno y coseno de β, respectivamente. Lo importante es que no dependen en absoluto del triángulo ABC, es decir, se pueden calcular en cualquier otro triángulo rectángulo tal que uno de los ángulos sea β ya que cualesquiera triángulos rectángulos en estas condiciones son semejantes entre sí. Para ángulos obtusos, usaremos las siguientes fórmulas como definición:

$$\sin\beta = \sin(180 - \beta), \qquad \cos\beta = -\cos(180 - \beta).$$

- **Identidad fundamental.** Para todo ángulo β, se tiene $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

  Para demostrarlo, basta considerar el caso de ángulos agudos ya que los cuadrados eliminan los signos. El teorema de Pitágoras nos dice directamente que

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

 José Miguel Manzano Prego – jmprego@ujaen.es

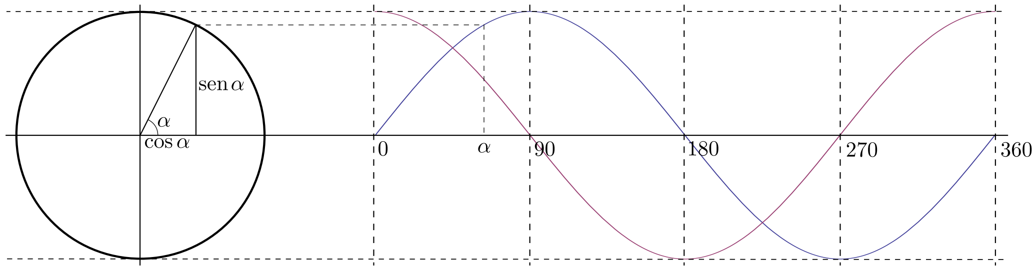


Figura 2: La circunferencia goniométrica.

Como las razones trigonométricas no dependen del triángulo, podemos colocar su vértice en un punto fijo, uno de sus lados en una semirrecta fija y dejar variar al otro, que hace el papel de hipotenusa, con longitud constante uno. Por tanto, elegir un ángulo concreto es elegir un punto sobre una circunferencia de radio uno, la conocida como *circunferencia goniométrica* (ver figura 2). Esto nos permite hablar de seno y coseno de ángulos que no tienen por qué estar entre 0 y 180, sino que pueden tomar cualquier valor real. La convención es tomar el seno positivo cuando el ángulo está en el primer o segundo cuadrante y negativo en el tercero o en el cuarto, mientras que el coseno se toma positivo en el primer y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercero.

Una propiedad muy interesante de las razones trigonométricas es que nos permiten relacionar distintos elementos de un triángulo cualquiera, no necesariamente rectángulo. Por ejemplo, el teorema del coseno puede verse como un teorema de Pitágoras generalizado para ángulos que no son necesariamente rectos.

- **Teorema del coseno.** En un triángulo ABC se cumple que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Para demostrarlo, supondremos que el ángulo α es agudo. Para los ángulos β y γ el razonamiento es similar y el caso en que α es obtuso se deja como ejercicio. Tomamos h_b la altura que pasa por B y corta al lado b en un punto P, como se muestra en la figura 3. En el triángulo rectángulo APC, tenemos que $\cos\alpha = AP/c$, luego despejamos $AP = c\cos\alpha$ y $CP = b - AP = b - c\cos\alpha$. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos ABP y BCP, podemos calcular

$$\begin{aligned} c^2 = AP^2 + h_b^2 = AP^2 + a^2 - CP^2 &= c^2\cos^2\alpha + a^2 - (b - c\cos\alpha)^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

De aquí se tiene directamente la fórmula del enunciado.

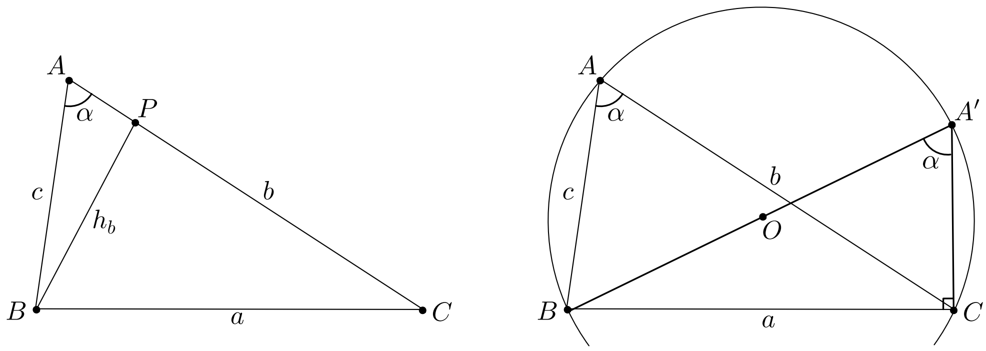


Figura 3: Demostración de los teoremas del coseno y del seno.

- **Teorema del seno.** En un triángulo ABC se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

  donde R es el radio de su circunferencia circunscrita.

  Para demostrarlo, supondremos que el ángulo α es agudo. Para los ángulos β y γ la demostración es similar y el caso en que es obtuso se deja como ejercicio. La idea es considerar la circunferencia circunscrita a ABC y su centro O, que estará al mismo lado de la recta BC que el lado A ya que el ángulo α es agudo Ahora podemos tomar un punto A' tal que $A'B$ es un diámetro de la circunferencia, como se ve en la figura 3. Como $A'B$ es un diámetro, necesariamente el ángulo $\angle BCA'$ es recto y además $\angle BA'C = \alpha$ por la propiedad del arco capaz. Esto nos permite calcular el seno de α en el triángulo rectángulo BCA' como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$ y hemos terminado.

Problema 1. (a) Hallar las longitudes de los lados de un triángulo ABC, sabiendo que $a = 5$, $\beta = 45$ y $\gamma = 60$.

(b) Responder a la misma pregunta sabiendo ahora que $a = 5$, $\beta = 45$ y $b = 4$.

(c) Hallar los ángulos de un triángulo ABC sabiendo que $a = 5$, $b = 4$ y $c = 6$.

Problema 2. Demostrar que los lados de un triángulo ABC están ordenados igual que sus ángulos opuestos. En otras palabras, si se cumple que $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, entonces $a \geq b \geq c$.

2. Medianas y baricentro

Las *medianas* de un triángulo son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. También llamaremos medianas a los segmentos que unen dichos puntos y denotaremos sus longitudes por m_a, m_b y m_c, respectivamente. Las tres medianas concurren en un punto interior al triángulo que se llama *baricentro* o centro de gravedad del triángulo y suele denotarse por G.

- **Teorema de la mediana.** Nuestro primer objetivo será la siguiente fórmula:
$$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$
Para demostrarla, sea A' el punto medio del lado a y llamemos $\alpha = \angle AMB$. El teorema del coseno aplicado a los triángulos ABA' y ACA' nos dice que
$$\begin{cases} b^2 = m_a^2 + (\frac{a}{2})^2 - am_a\cos\alpha \\ c^2 = m_a^2 + (\frac{a}{2})^2 - am_a\cos(180-\alpha) \end{cases}$$
Usando ahora que $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ y sumando las dos ecuaciones, tenemos que el último sumando de ambas se cancela y $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$, de donde se deduce la igualdad buscada tras despejar m_a^2 y tomar raíces cuadradas.
- **Ley del paralelogramo.** En un paralelogramo $ABCD$, la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales, es decir,
$$2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.$$
Esto no es más que reescribir el teorema de la mediana ya que las diagonales del paralelogramo se cortan en su punto medio M, luego BM es una mediana de ABC y podemos expresarla como $BM^2 = \frac{AB^2+BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$. Teniendo en cuenta que $BM = \frac{1}{2}BD$, obtenemos la fórmula buscada.

Definamos ahora también B' como el punto medio de AC y C' como el punto medio de AB. El triángulo $A'B'C'$ se llama *triángulo medio* de ABC y tiene sus lados paralelos a los de ABC por el teorema de Thales. Este teorema nos dice además que $A'B'C'$ es semejante a ABC con razón de semejanza es $\frac{1}{2}$. En particular, el área de $A'B'C'$ es la cuarta parte de la de ABC.

Problema 3. Consideremos el triángulo $A'B'C'$ definido anteriormente. Demostrar que

(a) Los triángulos $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ y $A'B'C'$ son congruentes y, en particular, dividen a ABC en cuatro triángulos de igual área.

(b) Los segmentos m_a, m_b y m_c dividen en seis triángulos de igual área.

(c) Las medianas de $A'B'C'$ son las medianas de ABC y, por tanto, ambos triángulos tienen el mismo baricentro.

(d) Se cumple que $AG = 2\cdot A'G$, $BG = 2\cdot B'G$ y $CG = 2\cdot C'G$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo. Se toman dos puntos P y Q que dividen al lado a en tres segmentos de igual longitud. Hallar AP y AQ en función de a, b y c.

3. Alturas y ortocentro

Las alturas de un triángulo son las rectas perpendiculares a las rectas que contienen a los lados por los vértices opuestos a estas. También suele llamarse altura de un triángulo a la longitud del segmento que tiene un extremo en un vértice, el otro extremo en el lado opuesto y es perpendicular a este último. En otras palabras, las alturas de un triángulo son las distancias de cada vértice al lado opuesto y las denotaremos por h_a, h_b y h_c. Es importante observar que las alturas pueden ser exteriores al triángulo si este es obtusángulo.

- **Fórmula para la altura.** Queremos ahora probar la siguiente igualdad:

  $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

  donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro.

  Para demostrarla, llamemos P al pie de la altura h_a. El teorema de Pitágoras en ABP y ACP nos dice que $h_a^2 = c^2 - x^2$ y $h_a^2 = b^2 - y^2$, luego $c^2 - b^2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (x-y)a$, de donde tenemos que x e y están determinados por el sistema de ecuaciones $x+y = a$ y $x-y = \frac{c^2-b^2}{a}$, que se resuelve fácilmente obteniendo

  $$x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \qquad\qquad y = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

  Usando ahora que $h_a^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$, tenemos que

  $$\begin{aligned} h_a^2 &= \left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) \\ &= \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2} \\ &= \frac{((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{4a^2}. \end{aligned}$$

  Teniendo en cuenta que $a+b+c = 2p$, $-a+b+c = 2(p-a)$, $a-b+c = 2(p-b)$ y $a+b-c = 2(p-c)$, obtenemos la fórmula para la altura.

- **Fórmula de Herón.** El área de ABC se puede calcular como

  $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

  Esto es inmediato a partir de la fórmula para la altura ya que el área S es la mitad del producto de un lado cualquiera por la altura correspondiente a ese lado. La fórmula de Herón demuestra que $ah_a = bh_b = ch_c$, lo que nos asegura que la fórmula del área de un triángulo no depende del lado respecto del que se calcule.

Si consideramos X, Y y Z los pies de las alturas del triángulo ABC correspondientes a los lados a, b y c, respectivamente, el triángulo XYZ se llama *triángulo órtico* asociado al triángulo ABC.

Problema 5. Demostrar que las alturas de un triángulo son las bisectrices interiores de su triángulo órtico. ¿Cuáles son las bisectrices exteriores del triángulo órtico? ¿Qué podemos decir entonces que son H, A, B y C desde el punto de vista del triángulo órtico?

Problema 6. Demostrar las siguientes igualdades:

$$AH \cdot HX = BH \cdot HY = CH \cdot HZ, \qquad \frac{HX}{AX} + \frac{HY}{BY} + \frac{HZ}{EZ} = 1.$$

Problema 7. Demostrar que la distancia del ortocentro a un vértice es el doble que la distancia del circuncentro al lado opuesto.

4. Bisectrices e incentro

Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos. Debemos entender que cada ángulo tiene dos bisectrices, una interior y otra exterior al triángulo, perpendiculares entre sí, lo que nos da un total de seis bisectrices (tres interiores y tres exteriores).

Al margen de que las bisectrices se definan como rectas que dividen a un ángulo en dos ángulos iguales, podemos pensar en ellas como los puntos que equidistan de las rectas que forman el ángulo. Usando esto, no es difícil ver que las tres bisectrices interiores se cortan en un único punto I interior al triángulo que llama *incentro*. Es el único punto interior al triángulo ABC que es centro de una circunferencia tangente a los lados del triángulo. A esta circunferencia la llamaremos *circunferencia inscrita* al triángulo y a su radio r lo llamaremos *radio inscrito* del triángulo.

De la misma forma, si tomamos las bisectrices exteriores de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ y la bisectriz interior del ángulo $\hat{A}$, estas tres rectas se cortarán en otro punto, que llamaremos A-*exincentro* correspondiente al lado a y lo denotaremos por I_a. Observemos que, de esta manera, I_a equidista de las rectas que contienen a los tres lados y, por tanto, existe una circunferencia tangente a dichas rectas con centro en I_a que llamaremos *circunferencia* A-*exinscrita* y a su radio, que denotaremos por r_a, lo llamaremos *radio* A-*exinscrito*. De la misma forma, se pueden definir I_b, I_c, r_b, r_c y las circunferencias exinscritas correspondientes a los lados b y c. En la parte de la derecha de la figura 4 pueden verse dibujadas estas cuatro circunferencias. Nuestro primer objetivo será determinar los radios.

- **Radio inscrito.** El radio inscrito está dado por

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

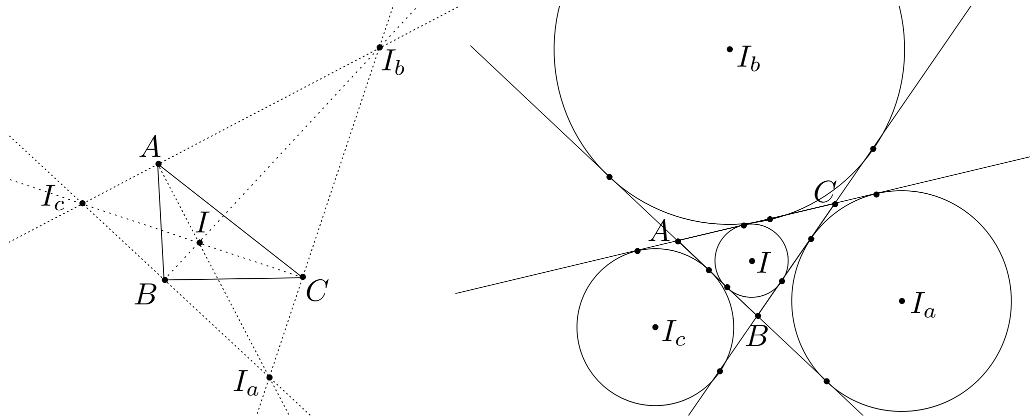


Figura 4: Determinación del incentro y los exincentros mediante las bisectrices (izquierda). Circunferencias inscrita y exinscritas con todos los puntos de tangencia (derecha).

Para probar esto, usaremos que el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABI, ACI y BCI. El área del triángulo ABI no es más que $\frac{1}{2}rc$ ya que este triángulo tiene por base el lado a y por altura el radio de la circunferencia inscrita (al ser tangente la circunferencia, el radio que pasa por el punto de tangencia es perpendicular a la base) y, de la misma manera, el área de ACI es $\frac{1}{2}br$ y la de BCI es $\frac{1}{2}ar$. Sumando las tres, tenemos que el área de ABC es igual a $\frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$, de donde deducimos la fórmula $S = pr$. Ahora basta rematar con la fórmula de Herón.

- **Radios exinscritos.** El radio A-exinscrito está dado por

$$r_a = \frac{(p-b)(p-c)}{r} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Para calcularlo, sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado c y sea S el punto de tangencia con la recta AB de la circunferencia A-exinscrita. Entonces, los triángulos ITB y BSI_a son semejantes ya que son rectángulos y los segmentos IB y I_aB son perpendiculares por pertenecer a sendas bisectrices del ángulo $\hat{B}$. Entonces, por semejanza de estos triángulos, tenemos que $\frac{IT}{BS} = \frac{BT}{I_aS}$, donde $IT = r$ y $I_aS = r_a$. Por otro lado, si llamamos U y V a los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con b y a, respectivamente, tenemos que[1] $BT = c - AT = c - AU = c - b + CU = c - b + CV = c - b + a - BV = c - b + a - BT$, de donde $BT = \frac{1}{2}(c - b + a) = p - c$. Razonando de forma similar, se llega a que $BS = p - b$. Sustituyendo estos valores en la igualdad $\frac{IT}{BS} = \frac{BT}{I_aS}$, tenemos la fórmula para r_a.

[1]Vamos a usar que dos segmentos con un extremo común y tangentes a una misma circunferencia en los otros extremos tienen la misma longitud.

De paso, hemos obtenido las distancias entre los puntos de tangencia de las circunferencias y los vértices adyacentes a estos. Los puntos en que las bisectrices interiores cortan a los correspondientes lados opuestos no son los mismos que dichos puntos de tangencia y los analizamos a continuación.

- **Teorema de la bisectriz.** Los segmentos en que una bisectriz interior divide al lado opuesto son proporcionales a los lados adyacentes.

  Para demostrar esto, llamemos X al punto de corte de la bisectriz interior al ángulo $\hat{A}$ con el lado a. Como X es un punto de la bisectriz, equidistará de los lados b y c. Por tanto, si llamamos d a esta distancia, podemos calcular $\text{Area}(ABX) = \frac{1}{2}bd = \frac{1}{2}BX \cdot h_a$ y $\text{Area}(ACX) = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}CX \cdot h_a$ luego dividiendo ambas igualdades, tenemos que $\frac{BX}{c} = \frac{CX}{b}$.

  Como también se cumple que $BX + CX = a$, deducimos que

  $$BX = \frac{ac}{b+c} \qquad\qquad CX = \frac{ab}{b+c}$$

- **Fórmula para la bisectriz.** Finalmente, vamos a demostrar la siguiente igualdad:

  $$v_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

  Para ello, el teorema del coseno aplicado a los triángulos ABX y ACX nos dice que

  $$\begin{cases} \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} = BX^2 = c^2 + v_a^2 - 2cv_a\cos(\frac{1}{2}\alpha) \\ \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} = CX^2 = b^2 + v_a^2 - 2bv_a\cos(\frac{1}{2}\alpha) \end{cases}$$

  Multiplicando la primera igualdad por b, restándole la segunda multiplicada por c y sacando factor común $c - b$, llegamos a que

  $$(c-b)\left(\frac{a^2bc}{(b+c)^2} - bc - v_a^2\right) = 0$$

  Si $b \neq c$, entonces

  $$v_a^2 = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} - bc = \frac{(a^2-(b+c)^2)bc}{(b+c)^2} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

  En el caso de que $b = c$, el triángulo ABC es isósceles luego $v_a = h_a$ y tenemos que $p - b = p - c = \frac{a}{2}$ y $\frac{bc}{(b+c)^2} = \frac{1}{4}$ luego

  $$v_a^2 = h_a^2 = \tfrac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c) = p(p-a) = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

  En cualquier caso, hemos probado la fórmula que queríamos.

Problema 8. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si un triángulo tiene dos alturas de la misma longitud, entonces es isósceles.

(b) Si un triángulo tiene dos medianas de la misma longitud, entonces es isósceles.

(c) Si un triángulo tiene dos bisectrices de la misma longitud, entonces es isósceles.

(d) Si en un triángulo tomamos la altura, mediana y bisectriz que pasan por un mismo vértice y dos de estas rectas coinciden, entonces también es isósceles.

Problema 9. Sea ABC un triángulo como hasta ahora.

(a) Demostrar que la bisectriz interior del ángulo A corta a la mediatriz del lado a en un punto D de la circunferencia circunscrita.

(b) Demostrar que B, C, I e I_a están todos sobre una circunferencia de centro D.

(c) Demostrar que I_aI es un diámetro de la circunferencia anterior y concluir que D es el punto medio del segmento I_aI.

Problema 10. Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean x, y, z las distancias de P a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

¿Qué obtenemos cuando P es el incentro de ABC?

5. Triángulos y polinomios simétricos elementales

En muchas ocasiones, nos encontramos con expresiones en las que aparecen los lados de un triángulo de forma simétrica, esto es, funciones de a, b y c tales que al permutar a con b, b con c y a con c no varían. Cuando estas funciones son racionales, se sabe que pueden expresarse en términos de los polinomios simétricos elementales de a, b y c. Por tanto, comenzaremos expresando dichos polinomios simétricos según las siguientes igualdades.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 2p, \\ ab+bc+ac & = & r^2+p^2+4Rr, \\ abc & = & 4RS. \end{array}\right.$$

La primera fórmula es obvia por definición del semiperímetro. Para la tercera, sea P el pie de la altura h_b y M el punto medio del lado A. Entonces, los triángulos APB y OMB son semejantes ya que son rectángulos y se cumple que $\angle BAP = \angle BOM$ por ser O el circuncentro del triángulo. Esto nos dice que $\frac{c}{R} = \frac{h_b}{a/2}$ luego $ac = 2Rh_b$ y multiplicando ambos miembros por b tenemos que $abc = 2Rbh_b = 4RS$. Finalmente, para probar la segunda fórmula, observemos que

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ac)p - abc$$

Usando las fórmulas ya probadas, podemos despejar $ab+bc+ac = \frac{S^2}{p^2} + p^2 + 4R\frac{S}{p}$, de donde se obtiene la identidad buscada sin más que sustituir $S = rp$.

De alguna forma, este proceso es el contrario a lo que hemos venido haciendo hasta ahora: ya no estamos expresando elementos en función de los lados, sino reinterpretando expresiones simétricas de los lados en términos de elementos geométricos como S, R, r y p. Algunos ejemplos que ilustren esta situación son los siguientes:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$
$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(ab+bc+ac)(a+b+c) + 3abc = 2p(p^2 - 3r^2).$$

6. Fórmulas trigonométricas con los ángulos de un triángulo

En esta sección, vamos a introducir identidades que involucren razones trigonométricas de los ángulos de nuestro triángulo de partida. En primer lugar, por el teorema del coseno,

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

y, por otro lado, el teorema del seno nos asegura que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$ luego

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2S}{bc}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{2S}{ac}, \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{2S}{ab}$$

Otras identidades interesantes son las que se tienen para los senos y cosenos de $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ y $\frac{\gamma}{2}$, que se deducen de las expresiones dadas para el coseno de α, β y γ y de las fórmulas trigonométricas para el ángulo mitad.

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

 José Miguel Manzano Prego – jmprego@ujaen.es