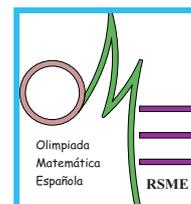




LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Mañana del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 11$$

sea divisible por 45.

Problema 2. En la clase de Educación Física hay 25 estudiantes colocados en el patio del instituto de forma que las distancias entre cada par de ellos son todas distintas. La profesora le da una pelota a cada estudiante y les pide que, cada vez que haga sonar el silbato, pasen todas las pelotas que tengan en ese momento al estudiante que se encuentre más cerca (la profesora no participa).

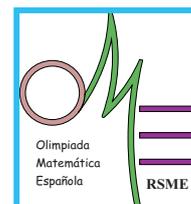
- Demostrar que, cada vez que suena el silbato, hay alguien que no recibe ninguna pelota.
- Después de sonar varias veces el silbato, ¿cuál es el número máximo de estudiantes que pueden quedarse sin ninguna pelota? Razonar la respuesta.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que no es un paralelogramo. Sean J e I los puntos medios de las diagonales AC y BD , respectivamente. Sea G el punto de la recta BC tal que DG es perpendicular a BC y sea H el punto de la recta AD tal que CH es perpendicular a AD . Las rectas DG y CH se cortan en el punto K . Sea E el punto de la recta BC tal que AE es perpendicular a BC y sea F el punto de la recta AD tal que BF es perpendicular a AD . Las rectas AE y BF se cortan en el punto L . Probar que KL es perpendicular a JI .



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD . La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F . Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 5. Encontrar todas las soluciones enteras (a, b, c) del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ab - c = 27 \\ ac + b = 36 \end{cases}$$

Problema 6. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y .
- X e Y son amigos.