LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Enunciados y soluciones - Mañana del viernes

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots 11$$

sea divisible por 45.

Solución. Para que $A(n)$ sea múltiplo de 5, la última cifra debe de ser 0 o 5, con lo que n tiene que ser múltiplo de 5. Para que sea múltiplo de 9, observamos que

$$A(n) \equiv 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod 9,$$

con lo que o bien n o bien $n+1$ es múltiplo de 9. Si n es múltiplo de 9, el menor n posible es 45. Si 9 divide a $n+1$, hay que hallar el menor n tal que n es múltiplo de 5 y $n+1$ múltiplo de 9. Es inmediato comprobar que $n = 35$. Por lo tanto, 35 es el número buscado.

Problema 2. En la clase de Educación Física hay 25 estudiantes colocados en el patio del instituto de forma que las distancias entre cada par de ellos son todas distintas. La profesora le da una pelota a cada estudiante y les pide que, cada vez que haga sonar el silbato, pasen todas las pelotas que tengan en ese momento al estudiante quien se encuentre más cerca (la profesora no participa).

(a) Demostrar que, cada vez que suena el silbato, hay alguien que no recibe ninguna pelota.

(b) Después de sonar varias veces el silbato, ¿cuál es el número máximo de estudiantes que pueden quedarse sin pelota? Razonar la respuesta.

Solución. Escojamos un estudiante cualquiera E_1 y supongamos que el estudiante E_1 le pasa sus pelotas a E_2, que es el que está más cerca. A su vez, E_2 se las pasa a E_3, E_3 a E_4,... y así sucesivamente. En algún momento, en esta cadena de pases algún estudiante se debe repetir, es decir, debe haber un E_n que le pasa sus pelotas a E_k para cierto $k < n$. Esto hace que se produzca un ciclo de pases $E_k \to E_{k+1} \to E_{k+2} \to \ldots \to E_n \to E_k$. Si este ciclo tuviera más de dos estudiantes, tendríamos la siguiente cadena de desigualdades que nos da claramente una contradicción:

$$d(E_n, E_k) < d(E_{n-1}, E_n) < d(E_{n-2}, E_{n-1}) < \ldots < d(E_k, E_{k+1}) < d(E_n, E_k).$$

Aquí hemos usado d para indicar distancia. Esto quiere decir que el ciclo tiene dos estudiantes y, por tanto, E_n le pasa a E_{n-1}. Distinguimos dos casos:

- Si podemos elegir E_1 tal que $n \geq 3$, entonces tenemos que E_{n-1} recibe pelotas de al menos dos estudiantes: E_{n-2} y E_n, luego hay algún estudiante que se queda sin recibir ninguna y hemos probado el apartado (a).

- Si, independientemente del E_1 que elijamos, tenemos que $n = 2$, entonces todos los estudiantes están agrupados en parejas que se pasan entre sí, pero esto es imposible ya que hay un número impar de estudiantes.

La respuesta al apartado (b) es 23. Por un lado, tenemos que todas las pelotas no pueden acabar en el mismo estudiante ya que los dos que están a menor distancia entre sí siempre se intercambian las pelotas que tienen y nunca se quedan sin ninguna. Por otro lado, veamos un ejemplo en que las pelotas acaban en manos de solo dos estudiantes (con lo cual 23 se quedan sin pelota): si se colocan en línea recta $E_1, E_2, \ldots, E_{25}$ en este orden de forma que $d(E_i, E_{i+1})$ sea mayor que $d(E_{i-1}, E_i)$ y distinta de $d(E_j, E_k)$ para cualesquiera $j, k \leq i$. Esto asegura que todas las distancias son distintas y que E_i es el estudiante más cercano a E_{i+1}, a quien le pasa sus pelotas en cada pitido. Al cabo de 23 pitidos, todas las pelotas acaban en manos de E_1 y E_2.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean J e I los puntos medios de las diagonales AC y BD, respectivamente. Sea G el punto de la recta BC tal que DG es perpendicular a BC y sea H el punto de la recta AD tal que CH es perpendicular a AD. Las rectas DG y CH se cortan en el punto K. Sea E el punto de la recta BC tal que AE es perpendicular a BC y sea F el punto de la recta AD tal que BF es perpendicular a AD. Las rectas AE y BF se cortan en el punto L. Probar que KL es perpendicular a JI.

Solución. Consideremos el círculo γ_1 con diámetro AC y el círculo γ_2 con diámetro BD. Sus centros son I y J, respectivamente. Como el cuadrilátero $DCGH$ es cíclico al cumplirse que $\angle CGD = \angle CHD = 90°$, entonces $KG \cdot KD = KC \cdot KH$. Por lo tanto, el punto K se encuentra en el eje radical de γ_1 y γ_2, puesto que tiene igual potencia con respecto a ambas circunferencias.
Lo mismo es cierto para el punto L porque el cuadrilátero $ABEF$ es cíclico ya que $\angle AEB = \angle AFB = 90°$ y por lo tanto $LB \cdot LF = LA \cdot LE$.
Dado que el eje radical de dos círculos es perpendicular a la recta que une sus centros, tenemos que KL es perpendicular a JI.

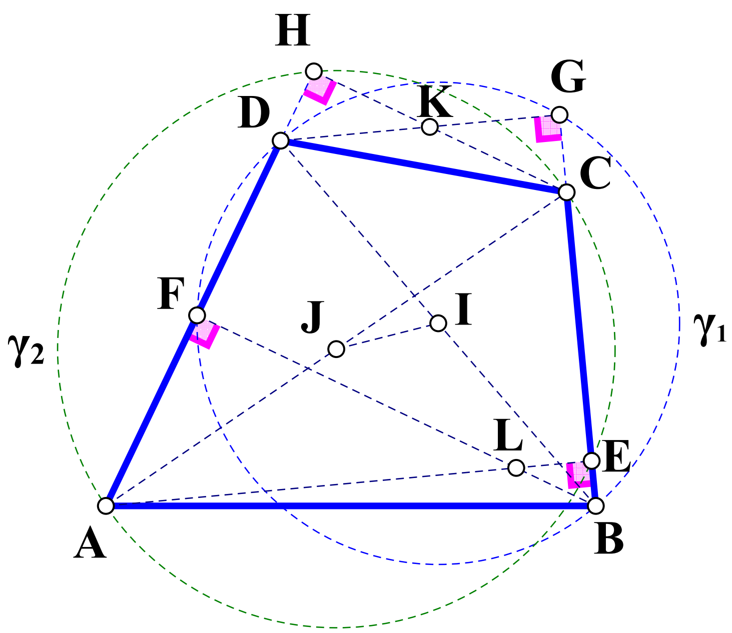

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 3.

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Solución. Como $AD = BC$, tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles. Sea M el punto medio de AB. Por lo tanto, los triángulos ADM, DMC y MCB son equiláteros de lado 5; eso se observa viendo que la altura del trapecio es $h = \sqrt{5^2 - (5/2)^2}$, y por lo tanto $DM^2 = h^2 + (5/2)^2 = 5^2$. Como ADC es isósceles y $\angle ADC = 120°$ por ser suma de dos ángulos de $60°$, tenemos que $AMCD$ es un rombo y las dos diagonales son bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle ABC$. Entonces, $\angle AFO = 60°$, ya que $\angle AOF = 90°$ y $\angle FAO = 30°$; y por el mismo motivo, $\angle AEO = 60°$. Por lo tanto, AEF es equilátero y O es el punto medio de EF ya que AO es la altura y por lo tanto también es la mediana.
Podemos calcular la longitud de AF usando que $AC = BD = 5\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras en ABC). Además, por el teorema de la bisectriz en ABC, tenemos que $AO = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, como conocemos la altura del triángulo equilátero AEF, tenemos automáticamente que la medida del lado, que es $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$. Entonces, $AE = AF = EF = \frac{20}{3}$. Finalmente, observamos que $AECF$ es un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares cuya área es $\frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

Problema 5. Encontrar todas las soluciones enteras (a, b, c) del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ab - c = 27 \\ ac + b = 36 \end{cases}$$

Solución. Observamos que

$$\begin{aligned} 2025 = (ab-c)^2 + (ac+b)^2 &= a^2b^2 - 2abc + c^2 + a^2c^2 + 2abc + b^2 \\ &= a^2b^2 + c^2 + a^2c^2 + b^2 = (a^2+1)(b^2+c^2). \end{aligned}$$

Esto nos dice que a^2+1 y b^2+c^2 son divisores (positivos) de 2025. Los divisores positivos de $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ son

$$\{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}.$$

El factor $a^2 + 1$ es una unidad más de un cuadrado y los únicos números de la lista anterior que cumplen esta propiedad son 1 y 5 (puede comprobarse fácilmente caso por caso). Esto nos dice que $a^2 = 0$ o bien $a^2 = 4$. Distingamos casos:

- Si $a = 0$, entonces el sistema del enunciado nos da directamente $c = -27$ y $b = 36$.
- Si $a = 2$, el sistema original se reduce a $2b - c = 27$ y $2c + b = 36$. Este sistema lineal se resuelve fácilmente y tiene solución única $b = 18$ y $c = 9$.
- Si $a = -2$, el sistema original se reduce a $-2b - c = 27$ y $-2c + b = 36$. Este sistema lineal tiene solución única $b = \frac{-18}{5}$ y $c = \frac{-99}{5}$, que no son números enteros, luego no obtenemos soluciones en este caso.

Deducimos que las únicas soluciones son $(a, b, c) = (0, 36, -27)$ y $(a, b, c) = (2, 18, 9)$.

Problema 6. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Solución. Supongamos que no existe tal par. Sea Δ el máximo número de enemigos que tiene una persona, sea u una persona con Δ enemigos y sean $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sus enemigos ordenados por número de enemigos (es decir, v_1 es el que tiene menos enemigos y v_Δ el que tiene más). Nótese que $\Delta \geq 2$, dado que de otra forma habría un par de personas con el mismo número de enemigos que son amigos.
Como $v_1, \ldots, v_\Delta$ son todos amigos entre sí, no pueden haber dos con el mismo número de enemigos, y como Δ es el máximo número de enemigos, tenemos que v_i tiene i enemigos para todo $1 \leq i \leq \Delta$. Sean $w_1, \ldots, w_{\Delta-1}, w_\Delta = u$ los enemigos de v_Δ. Por el mismo razonamiento, w_i tiene i enemigos. Nótese que u y v_Δ no tienen enemigos en común y, en particular, $v_1 \neq w_1$. Además, v_1 y w_1 son amigos entre sí. Como tienen el mismo número de enemigos, hemos llegado a una contradicción.