SESIÓN PARA EL V SEMINARIO ENTRENANDO PARA LA OLIMPIADA

Francisco Javier Martínez Sánchez

PROBLEMA I (DIVISIBILIDAD)

Definición. Un número $a \in \mathbb{Z}$ es *divisible* por otro $b \in \mathbb{Z}$ cuando existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bk$, en cuyo caso se escribe $b|a$ y se lee b divide a a.

Definición. Un número *primo* es un número entero $p \neq \pm 1$ que sólo tiene como divisores a ± 1 y $\pm p$. Un número entero que no es primo se llama *compuesto*.

Algunos conjuntos famosos de números primos son:

- Los *primos de Fermat* son números primos de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ con $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, … Fermat pensaba que esta expresión generaba números primos para cada $n \in \mathbb{N}$, pero Euler demostró que $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ es compuesto. En la actualidad solo se conocen cinco primos de Fermat, a saber, F_0, F_1, F_2,F_3 y F_4. La pregunta "¿existen otros primos de Fermat?" sigue sin respuesta a día de hoy.
- Los *primos de Mersenne* son números primos de la forma $M_n = 2^n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$. Al igual que ocurría con Fermat, Mersenne estaba convencido de que esta expresión generaba números primos para cada $n \in \mathbb{N}$. En la actualidad, se conocen 51 primos de Mersenne y se desconoce si hay o no una cantidad infinita de ellos.
- Los *primos de Germain* son números primos p de modo que $2p + 1$ también es primo. Por ejemplo, 2 es un primo de Germain porque $2 \cdot 2 + 1 = 5$ también es primo. A día de hoy no se sabe si existen o no infinitos primos de Germain.
- Los primos gemelos son parejas de primos p y q de modo que $q = p + 2$. Por ejemplo, 5 y 7 son primos gemelos; 11 y 13 son primos gemelos; 17 y 19 son primos gemelos. De nuevo, un problema aún sin resolver es demostrar o no la existencia de infinitos primos gemelos. Este problema es denominado la 'conjetura de los primos gemelos'.

Proposición (Euclides). Un número $p \in \mathbb{Z}$ es primo si, y sólo si, $p|(ab) \Rightarrow p|a \vee p|b$.

Teorema fundamental de la Aritmética. Todo número entero $n > 1$ se factoriza como producto de números primos (único salvo el orden) $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_m^{e_m}$, donde $m \in \mathbb{N}$, $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_m$ son números primos y $e_k \in \mathbb{N}$ para cada $k = 1, \dots, m$.

Proposición (Euclides). Existen infinitos números primos.

-Demostración 1-

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe una cantidad finita de números primos $p_1, \dots, p_m$ y consideremos el número $N = p_1 p_2 \dots p_m + 1$. El TFA garantiza la existencia de un divisor primo de N, digamos q. Evidentemente, $q = p_k$ para algún $k = 1, \dots, m$. Consecuentemente, $q|(p_1 p_2 \dots p_m)$, así que $q|(N - p_1 p_2 \dots p_m) = 1$ por ser $q|p$. Contradicción, un número primo no puede dividir a 1.

-Demostración 2-

Euler demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Si existiese una cantidad finita de números primos entonces $\prod_{p\ primo} \frac{1}{1-p^{-1}} < \infty$ y, en consecuencia, la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots < \infty$. Contradicción, porque

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

Conjetura de Goldbach. Problema propuesto por C. Goldbach en una carta para L. Euler en el año 1742. El enunciado es muy sencillo: *Todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos*. A día de hoy, nadie ha conseguido refutar o confirmar dicha conjetura. La conjetura de Goldbach ha sido comprobada verdadera con ordenadores hasta 10^{18}.

Teorema de navidad (Fermat, 1640). Un número primo p es suma de cuadrados si, y sólo si, $p=2$ o $p\equiv 1\ (mod\ 4)$.

-Demostración- $\Rightarrow$
Evidentemente, $2=1^2+1^2$. Supongamos que un número primo impar es $p=a^2+b^2$ para ciertos $a,b\in\mathbb{N}$. En tal caso, a^2 y b^2 tienen paridad opuesta y, sin pérdida de generalidad, asumimos que a^2 es par y b^2 es impar. De igual modo, es inmediato que a es par y b es impar, es decir, $a=2u$ y $b=2v-1$ para ciertos $u,v\in\mathbb{N}$. Así pues, $p=a^2+b^2=(2u)^2+(2v-1)^2=4u^2+4v^2-4v+1\equiv 1\ (mod\ 4)$, como se quería demostrar.

Función *sigma* σ: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. $\sigma_x(n)=\sum_{d|n,d>0}d^x$ = suma de todos los divisores positivos de n elevados a $x>0$. Suponiendo que $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_m^{e_m}$ es la descomposición en factores primos de $n\in\mathbb{N}$,

$$\sigma_0(n)=n^{\underline{o}}\ de\ divisiores\ de\ n=\prod_{k=1}^{m}(1+e_k)\text{ y }\sigma_x(n)=\prod_{k=1}^{m}\frac{p_k^{(1+e_k)x}-1}{p_k^x-1}.$$

Números perfectos. Un número se dice perfecto si la suma de todos sus divisores positivos (sin contar al propio número) es igual al número considerado. Por ejemplo, 6 y 28 son números perfectos. ¡Compruébese! Euclides comprobó que $2^{n-1}(2^n-1)$ genera un número perfecto siempre y cuando 2^n-1 es primo (¿por qué?). En la actualidad, solo se conocen poco más de 50 números perfectos y todos ellos son pares. No se sabe aún si hay infinitos números perfectos o si existe algún número perfecto impar.

PROBLEMA I. *Dado un número entero positivo, consideremos la operación consistente en restarle su mayor divisor propio. Partiendo del número 19^{19} y aplicando reiteradamente esta operación se obtiene el número 1. Determinar cuántas veces se ha aplicado la operación.*

Pista: Calcula los primeros resultados de aplicar la operación e intenta generalizar…

-Solución- ***114 veces***

Etapa 1: $N_1=19^{19}-19^{18}=18\cdot 19^{18}$
Etapa 2: $N_2=18\cdot 19^{18}-9\cdot 19^{18}=9\cdot 19^{18}$
Etapa 3: $N_3=9\cdot 19^{18}-3\cdot 19^{18}=6\cdot 19^{18}$
Etapa 4: $N_4=6\cdot 19^{18}-3\cdot 19^{18}=3\cdot 19^{18}$
Etapa 5: $N_5=3\cdot 19^{18}-19^{18}=2\cdot 19^{18}$
Etapa 6: $N_6=2\cdot 19^{18}-19^{18}=19^{18}$
En 6 pasos hemos bajado el exponente en una unidad. En los siguientes 6 pasos, llegaremos a $N_{12}=19^{17}$.
Igualmente, $N_{18}=19^{16}, N_{24}=19^{15},\ldots,N_{108}=19^1$. *Finalmente,*

$$N_{109}=19-1=18,\qquad N_{110}=18-9=9$$
$$N_{111}=9-3=6,\qquad N_{112}=6-3=3$$
$$N_{113}=3-1=2,\qquad N_{114}=2-1=\mathbf{1}$$

PROBLEMA II (ECUACIONES)

Ecuación polinómica de grado $n \geq 1$: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

En 1º ESO, ecuaciones de grado $n = 1$. En 2º ESO, ecuaciones de grado $n = 1$ y $n = 2$ (completas e incompletas + bicuadradas). En 3º ESO, 4º ESO y Bachillerato, ecuaciones de grado superior (método de Ruffini). Por supuesto, en 4º ESO y Bachillerato, también ecuaciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y radicales… No todas las ecuaciones son polinómicas. Por ejemplo,

- $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 28$ es una ecuación exponencial + ¿Sabes resolverla?
- $4\sin(x) + 1 = \cos(2x)$ es una ecuación trigonométrica + ¿Sabes resolverla?
- Se pueden combinar, $e^x + x^3 + x + \cos(x) = 7\dots$ (Existencia de solución = Teorema de Bolzano, Unicidad de solución = estudio de la primera derivada)
- $x^x = 2$ https://www.youtube.com/watch?v=sWgNCra93D8.

Teorema fundamental del Álgebra. Toda ecuación polinómica de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n soluciones en $\mathbb{C}$ contando con multiplicidad.

Por ejemplo, $x^2 - 1 = 0$ tiene dos soluciones, a saber, $+1$ y -1. Sin embargo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales ($\pm i$). La ecuación $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ tiene 4 soluciones, $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. Como veis, las ecuaciones de grado par pueden tener todas sus soluciones reales o todas sus soluciones complejas. ¿Qué ocurre con las ecuaciones de grado impar?

Proposición. Toda ecuación de grado impar tiene, al menos, una solución real.

-Demostración- Consecuencia directa del Teorema de Bolzano…

Proposición. Si existe $x_* \in \mathbb{C}$ tal que $f(x_*) = 0$ (x_* es una solución de la ecuación polinómica $f(x) = 0$), entonces $f(\overline{x_*}) = 0$ ($\overline{x_*}$ también es solución de la ecuación polinómica $f(x) = 0$)

-Demostración- Consecuencia inmediata de que todos los coeficientes del polinomio f son reales y del hecho de que $f(\overline{x_*}) = \overline{f(x_*)}$.

Estos dos últimos resultados permiten escribir

Grado	*Número de raíces reales*
2	0 o 2
3	1 o 3
4	0, 2 o 4
5	1, 3 o 5
6	0, 2, 4 o 6
…	…

Un resultado curioso… No existe una fórmula exacta (a partir de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces) para hallar las soluciones de una ecuación polinómica de grado mayor o igual que cinco. Esto significa que si existen fórmulas para resolver cualquier ecuación polinómica de grado ≤ 4. ¡Ojo! No significa que ninguna ecuación de grado ≥ 5 se pueda resolver. Algunas si y otras no. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - 1 = 0$ se puede resolver, pero la ecuación $2x^5 - 10x + 5$ no. No se estudian en el instituto, salvo la fórmula para grado 2. Este resultado tan impresionante fue demostrado por E. Galois, un matemático francés que falleció en 1832 a la edad de 20 años en un duelo por amor…

Método de Newton-Raphson (aproximación de raíces). $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ tiende a la solución de $f(x) = 0$. Por ejemplo, considérese la ecuación $x^5 - 4x - 1 = 0$ y toma $x_0 = 1'5$:

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0^5 - 4x_0 - 1}{5x_0^4 - 4} \approx 1'4721407,\ x_2 = x_1 + \frac{x_1^5 - 4x_1 - 1}{5x_1^4 - 4} \approx 1'4708210,\ x_3 = x_2 + \frac{x_2^5 - 4x_2 - 1}{5x_2^4 - 4} \approx 1'4708182$$

La tercera iteración cuenta ya con nueve decimales exactos de la solución que hay en $(1,2)$.

Relaciones de Cardano-Vieta. Si $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ son las soluciones de la ecuación $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ con $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$, entonces

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n = \frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sum_{i<j} \zeta_i \zeta_j = -\frac{a_{n-2}}{a_n},\ \dots,\ \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene por soluciones 2 y 3. Efectivamente, $6 = 2 \cdot 3$ y $5 = 2 + 3$.

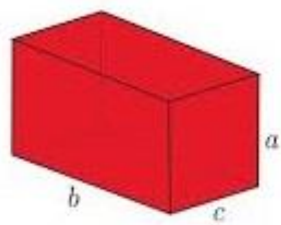
Regla de los signos de Descartes. El número de raíces positivas de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ (con términos ordenados según el grado) es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes del polinomio f o disminuido en una cantidad par. Por ejemplo, la ecuación $x^5 + 3x^4 - 5x^2 + x - 7 = 0$ tiene por coeficientes $\{1,3,0,-5,1-7\}$ y supone un total de 3 cambios de signo. En consecuencia, la ecuación admite 3 o 1 soluciones positivas. Aplicando el resultado a la ecuación $f(-x) = 0$, obtenemos una cota superior para el número de soluciones negativas de $f(x) = 0$.

Teorema de Sturm. ¿Cómo hallar la cantidad de raíces positivas de un polinomio $f(x)$ (contadas sin multiplicidad)? Construimos la sucesión de polinomios $p_1(x) = f(x)$, $p_2(x) = f'(x)$ y $p_k(x) = -resto\big(p_{k-1}(x), p_k(x)\big)$ (resto de dividir $p_{k-1}(x)$ entre $p_k(x)$) hasta que obtengamos como resto un polinomio constante. Fijamos $a < b$ y consideramos los valores

$$\{p_1(a), p_2(a), p_3(a), \dots, p_m(a)\} \qquad \{p_1(b), p_2(b), p_3(b), \dots, p_m(b)\}$$

Si llamamos $V(c)$ =nº cambios de signo de $\{p_1(c), p_2(c), p_3(c), \dots, p_m(c)\}$, entonces el número de soluciones positivas de $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$ es igual a $V(a) - V(b)$.

Actividad. Comprueba que no existe ningún prisma rectangular con igual área, volumen y perímetro.



-Solución- *Supongamos que dicho prisma existe y llamemos a sus lados* $a, b, c > 0$.
El volumen es $V = abc$.
El área es $A = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$.
El perímetro es $P = 4a + 4b + 4c = 4(a + b + c)$.
Si $V = A = P$, *entonces* $abc = 2(ab + ac + bc) = 4(a + b + c) \coloneqq \lambda > 0$.
El volumen, área y perímetro me recuerdan a las relaciones de Cardano-Vieta…
Si $p(t) = t^3 + At^2 + Bt + C$ *es un polinomio con raices* a, b, c, *entonces*

$$\begin{cases} A = -(a + b + c) = -\lambda/4 \\ B = ab + ac + bc = \lambda/2 \\ C = -abc = -\lambda \end{cases}$$

Así, $p(t) = t^3 - \frac{\lambda}{4} t^2 + \frac{\lambda}{2} t - \lambda$, *pero este polinomio solo tiene una raiz positiva. Al ser un polinomio de grado impar, el teorema de Bolzano garantiza la existencia de, al menos, una raiz real (que, además, es positiva)… pero el teorema de Sturm asegura que el número de raices positivas es, como mucho, uno (*). ¡Contradicción! El polinomio construido tiene tres raices positivas, a saber,* a, b, c.
Aplicación del teorema de Sturm (*)

$$p_0(x) = t^3 - \frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{\lambda}{2}t - \lambda, p_1(x) = 3t^2 - \frac{\lambda}{2}t + \lambda, p_2(t) = \frac{\lambda^2-24\lambda}{72}t - \frac{\lambda^2}{72}, p_3(t) = \frac{2\lambda^2(\lambda-24)^2}{30-\lambda}$$

Asumiendo que $\lambda < 24$ *(¿por qué?), es fácil ver*

$$V(0) = nº\ cambios\ signo\ en \{p_0(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0)\} = 3$$
$$V(+\infty) = nº\ cambios\ signo\ en \{p_0(+\infty), p_1(+\infty), p_2(+\infty), p_3(+\infty)\} = 2$$

Así pues, el número de soluciones positivas es $3 - 2 = 1$.

Ecuaciones diofánticas. Las ecuaciones diofánticas reciben su nombre en honor a Diofanto de Alejandría y son ecuaciones polinómicas en varias variables con la pecularieadad de buscar solo sus soluciones enteras o naturales. Algunas ecuaciones diofánticas famosas son:

- *Ecuación pitagórica*: $x^2 + y^2 = z^2$. Una solución natural es $(3,4,5)$. ¿Hay más soluciones enteras? Ejercicio. Comprueba que $x = n^2 - m^2, y = 2nm, z = n^2 + m^2$ es solución entera de la ecuación pitagórica para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$.
- *Ecuación de Fermat*: $x^n + y^n = z^n$. La ecuación de Fermat para $n = 2$ no es más que la ecuación pitagórica. Fermat conjeturó que su ecuación no tenía soluciones naturales para $n \geq 3$, pero no demostró el resultado: simplemente dijo que ‘el margen de este libro no es lo suficientemente grande para contener la demostración’. En el año 1996, A. Wiles demostró que Fermat tenía razón.
- *Ecuación de Catalán*: $a^x - b^y = 1$ la única solución natural de esta ecuación es $3^2 - 2^3 = 1$ (demostrado en 2002).

<u>**Problema II.**</u> Encontrar todas las soluciones naturales de la ecuación

$$f(n,m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$$

Pista: Prueba con valores pequeños de n y m…

-Solución- $(n,m) = (2,5)$.

Enseguida vemos que si $n = 1$ *o* $m = 1$, *entonces* $f(n,m) > 1 > \frac{3}{4}$. *Así pues, sabemos que* $n, m \geq 2$.

Si $n \geq 5$ *y* $m \geq 2$, *entonces*

$$f(n,m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} < \frac{3}{4} \Rightarrow 2 \leq n \leq 4, m \geq 2$$

Del mismo modo, si $2 \leq n \leq 4$ *y* $m \geq 6$, *entonces*

$$f(n,m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} < \frac{3}{4} \Rightarrow 2 \leq n \leq 4, 2 \leq m \leq 5$$

Por último,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(n^2 + nm + 1) = 3mn^2$$

En consecuencia, $3mn^2$ *es múltiplo de* $4 \Rightarrow mn^2$ *es múltiplo de* $4 \Rightarrow m \in \dot{4} \vee n \in \dot{2} \vee (m \in \dot{2} \wedge n \in \dot{2})$

Combinando ambas condiciones, $m \in \dot{4} \vee n \in \dot{2} \vee (m \in \dot{2} \wedge n \in \dot{2})$ *y* $2 \leq n \leq 4, 2 \leq m \leq 5$ *quedan las siguientes posibilidades:*

Condición 1	*Condición 2*	*Consecuencia*
$2 \leq n \leq 4, 2 \leq m \leq 5$	$m \in \dot{4}$	$m = 4$ *y* $2 \leq n \leq 4$
$2 \leq n \leq 4, 2 \leq m \leq 5$	$n \in \dot{2}$	$n \in \{2,4\}$ *y* $2 \leq m \leq 5$
$2 \leq n \leq 4, 2 \leq m \leq 5$	$m \in \dot{2} \wedge n \in \dot{2}$	$m \in \{2,4\}$ *y* $n \in \{2,4\}$

Comprobando cada una de estas posibilidades, solo encontramos una solución

Si $n = 2$, *entonces* $f(2, m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4m} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = 5$.

PROBLEMA III (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN)

Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice *inductivo* si $1 \in A$ y $a \in A \Rightarrow a + 1 \in A$. El conjunto de los números naturales es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

Principio de inducción. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$.

Ejemplo 1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

-Solución- *Sea* $A = \left\{n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right\}$ *y veamos que* $A = \mathbb{N}$, *es decir, que la propiedad* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *es cierta para todo número natural* n. *Evidentemente, por definición,* $A \subset \mathbb{N}$. *Por tanto, basta comprobar que A es inductivo y así el principio de inducción nos garantiza que* $A = \mathbb{N}$.

Caso base ($1 \in A$*). Trivialmente,* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Etapa de inducción ($n + 1 \in A$*).*

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \Rightarrow n + 1 \in A$$

Nota histórica. Un joven Gauss resolvió la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$ en edad escolar cuando su maestro propuso como ejercicio la suma ante el mal comportamiento de los estudiantes. Sorprendentemente para él, Gauss dio con el resultado en cuestión de pocos minutos. De un modo inconsciente en aquel momento, había dado con la fórmula para la suma de los primeros términos de una progresión aritmética.

Ejemplo 2. Demostrar que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

-Solución- *Sea* $A = \left\{n \in \mathbb{N}: 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}\right\}$ *y veamos que* $A = \mathbb{N}$, *es decir, que la propiedad* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ *es cierta para todo número natural* n. *Evidentemente, por definición,* $A \subset \mathbb{N}$. *Por tanto, basta comprobar que* A *es inductivo y así el principio de inducción nos garantiza que* $A = \mathbb{N}$.

Caso base ($1 \in A$*). Trivialmente,* $1 = 2 - \frac{1}{1}$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Etapa de inducción ($n + 1 \in A$*).*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \leq$$
$$\leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Nota. ¡Ojo! No siempre el principio de inducción es el camino más rápido para probar enunciados que involucren a los números naturales. Por ejemplo, observamos que para cualquier $k \geq 2$ se cumple $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Así pues,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Esto demuestra de inmediato el resultado. Este tipo de sumas donde los términos se cancelan unos con otros y solo sobreviven el primero y el último se conocen como sumas telescópicas.

Nota histórica. La suma anterior $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ está íntimamente ligada al Problema de Basilea. Este problema fue resuelto por Euler en 1735 y consiste en hallar el valor de la suma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{100^2} + \cdots$$

Dicha suma vale exactamente $\frac{\pi^2}{6}$. ¿Qué hace aquí el número π? ¿Por qué aparece? Qué curioso, ¿no?

El matemático alemán B. Riemann introdujo una función (llamada función *z* de Riemann) como sigue

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \qquad (s \in \mathbb{C}, Re(s) > -1)$$

Esta función es la principal protagonista de uno de los problemas matemáticos más importantes de la actualidad, la hipótesis de Riemann, propuesta por el propio Riemann en el año 1859. A día de hoy sigue sin estar resuelta. Hay una recompensa de un millón de dólares para aquel que consiga resolver este problema. ¡Ya sabes! Anímate…

Volviendo a la función *z* de Riemann. En realidad, lo que Euler comprobó fue que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1'6449$. Hoy en día se sabe que

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \approx 1'0823$$
$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} \approx 1'0173$$
$$\vdots$$

Todo parece indicar que la función *z* de Riemann en los valores pares $2m$ toma un valor del tipo

$$\zeta(2m) = \frac{\pi^{2m}}{C_m},$$

siendo C_m un número natural. Esto fue conjeturado por Euler. En efecto, llevaba razón y esa constante C_m que aparece está relacionada con los *números de Bernoulli*.

¿Qué ocurre con los valores impares? ¿Se sabe algo de $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, …? Poca cosa…

No se ha encontrado una fórmula cerrada para los valores impares como la que se conoce para los valores pares. El matemático francés R. Apéry demostró que $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \approx 1'2020$ es un número irracional. Algo es algo. No se sabe aún nada sobre la irracionalidad de $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, …

Ejercicio 1. Demostrar que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Demostrar que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Demuestra que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11 para todo $n \in \mathbb{N}$ utilizando inducción.

Ejercicio 4'. Demuestra que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11 para todo $n \in \mathbb{N}$ utilizando congruencias.

PROBLEMA IV (CONGRUENCIAS)

Teorema (división euclídea). Para todo $D, d \in \mathbb{Z}$ con $d > 0$ existen únicos $c \in \mathbb{Z}$ (cociente) y $r \in \mathbb{Z}$ (resto) tales que $0 \leq r < d$ y $D = dc + r$.

Definición (Gauss, 1798). Los números enteros a y b son *congruentes módulo* $n > 0$ si ambos tienen el mismo resto al ser divididos por n, en cuyo caso se escribe $a \equiv b\ (mod\ n)$.

Propiedades.

(i) $a \equiv b\ (mod\ n) \Leftrightarrow n|(a-b)$

(ii) $\equiv$ es una relación de equivalencia:

- $a \equiv a\ (mod\ n)$.
- $a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow b \equiv a\ (mod\ n)$.
- $a \equiv b\ (mod\ n), b \equiv c\ (mod\ n) \Rightarrow a \equiv c\ (mod\ n)$

(iii) Si $a \equiv b\ (mod\ n)$ y $c \equiv d\ (mod\ n)$, entonces $a + c \equiv b + d\ (mod\ n)$ y $ac \equiv bd\ (mod\ n)$.

El conjunto de todos los restos módulo n es $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \dots, n-1\}$ y tiene estructura de anillo con la suma y producto anteriores.

Actividad. ¿Tiene el polinomio $p(x) = x^3 - 24x^2 + 7x + 23$ raices enteras?

-Solución-

Supongamos que $m \in \mathbb{Z}$ *es una raíz de* p, *es decir,* $p(m) = m^3 - 24m^2 + 7m + 23 = 0$. *Sin embargo, al tomar módulo 2 queda*

$$0 = p(m) \equiv m^3 + m + 1\ (mod\ 2),$$

Pero esto significa que $m^3 + m + 1$ *es par. Contradicción. Así pues,* p *no tiene raíces enteras.*

Actividad (Lagrange). Demuestra que todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados perfectos.

Actividad. Demuestra que entre dos primos gemelos (salvo 3 y 5) siempre hay un número múltiplo de seis.

-Solución-

Si p *y* $p+2$ *son números primos (distintos de 3 y 5), entonces ambos son impares y forzosamente* $p+1$ *es par. Los restos módulo 3 de* $p, p+1, p+2$ *son 0, 1 y 2 porque cada tres números consecutivos, uno tiene resto 0 mod 3, otro resto 1 mod 3 y otro resto 2 mod 3. En otras palabras, cada tres números consecutivos solo uno tiene resto 0 mod 3 o, si se prefiere, es múltiplo de tres y como* p *y* $p+2$ *no pueden ser múltiplos de 3 por ser primos, se sigue que* $p+1$ *tiene que ser múltiplo de 3... Pero entonces* $p+1$ *es múltiplo de dos (es par) y múltiplo de tres, lo que significa que es múltiplo de seis.*

Problema IV. Sea H un conjunto de n puntos en el plano con coordenadas enteras tales que cualesquiera tres de ellos no están alineados y forman un triángulo cuyo baricentro no tiene ninguna coordenada entera. Determinar el valor máximo posible de n.

Pista: Prueba que entre cinco números enteros cualesquiera siempre hay tres cuya suma es múltiplo de tres.

-Solución-

Sea $H = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ *con* $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ *para cada* $k = 1, \dots, n$ *que, además, tiene la propiedad de que* $(a_i, b_i), (a_j, b_j), (a_k, b_k)$ *forman un triángulo para cualesquiera* $i \neq j \neq k$ *cuyo baricentro no tiene coordenadas enteras. El baricentro de un triángulo de vértices* $(a_i, b_i), (a_j, b_j), (a_k, b_k)$ *viene dado por*

$$\left(\frac{a_i + a_j + a_k}{3}, \frac{b_i + b_j + b_k}{3}\right)$$

¡Ojo! Dados cinco números enteros cualesquiera, siempre hay tres de ellos que suman un múltiplo de 3 y, por tanto, el baricentro tendría coordenadas enteras. ¿Por qué? Razonar tomando módulo tres:

Si tres de los cinco tienen el mismo resto, entonces la suma de ellos tres ya es un múltiplo de tres. En caso contrario, si no hay tres con igual resto, entonces tiene que haber tres que tengan restos diferentes y la suma de ellos es, de nuevo, múltiplo de tres.

Nótese que con cuatro números, podemos coger tres que no sumen múltiplo de 3. Basta tomar los números 1, 2, 5 y 7 y ver que no existe ninguna combinación de tres de ellos que sume un múltiplo de 3.

Esto nos dice que el número buscado es menor o igual que cuatro y no es difícil encontrar cuatro puntos tales que tres cualesquiera no están alineados y cuyos baricentros no tienen coordenadas enteras: $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$.

PROBLEMA V (ECUACIONES FUNCIONALES)

Problema V (2005, Eslovenia). Encuentra todas las funciones $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ tales que

$$x^2\big(f(x) + f(y)\big) = (x + y)f(f(x)y).$$

-Solución-

Tomando $x = 1, y > 0$ *queda* $f(1) + f(y) = (1 + y)f(f(1)y)$ *para todo* $y > 0$.

Tomando $x = y = 1$ *queda* $f(1) = f\big(f(1)\big)$, *es decir,* $f(1)$ *es un punto fijo de* f.

Supongamos que $f(1) = \alpha$, *por lo que* $f(\alpha) = f\big(f(1)\big) = f(1) = \alpha$.

Tomando $x = \alpha, y = 1$ *queda* $\alpha^2\big(f(\alpha) + f(1)\big) = (1 + \alpha)f\big(f(1)\big)$ *y como* $f(1) = \alpha$ *y* $f\big(f(1)\big) = f(\alpha) = \alpha$,

$$\alpha^2(\alpha + \alpha) = (1 + \alpha)\alpha \Rightarrow \alpha(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado,

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

No obstante, α *no puede ser* $-1/2$ *porque* $\alpha = f(\alpha) \in im(f) = (0, +\infty) \Rightarrow \alpha = 1$. *En conclusión,* $f(1) = 1$.

Finalmente, $f(1) + f(y) = (1 + y)f(f(1)y)$ *se traduce a* $1 + f(y) = (1 + y)f(y)$ *para todo* $y > 0$. *Equivalentemente,*

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

Así pues, la única solución de la ecuación funcional es la función $f(x) = x^{-1}, x > 0$.