LXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2024 - 2025

Mañana del viernes 17 de enero de 2025

Primera sesión

Problema 1. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea M un punto en la diagonal BD que cumple $MD = 2BM$. Las rectas AM y BC se cortan en un punto N. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo MND y el área del paralelogramo $ABCD$?

Problema 2. Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple que $q(n) = \dfrac{1}{n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 2024$. Halla el valor $q(2025)$.

Problema 3. En una pizarra se escribe un número entero positivo n y se saca a un voluntario X que sigue los siguientes pasos:

1. Paso 1. X borra el número que hay escrito y escribe el número anterior o el posterior a dicho número (a su elección).
2. Paso 2. X borra el número que hay escrito y escribe el doble de dicho número.

Los pasos se repiten en orden 1-2-1-2-... indefinidamente. Determina para qué números iniciales n, el voluntario X puede escribir un cuadrado perfecto en la pizarra en algún momento haciendo elecciones adecuadas en el paso 1.

LXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2024 - 2025

Tarde del viernes 17 de enero de 2025

Segunda sesión

Problema 4. Determina el menor entero positivo n que tiene al menos 4 divisores diferentes a, b, c, d, distintos de 1 y de n, de forma que

$$a + b + c + d = 1001.$$

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de forma que las rectas AB y CD se cortan en un punto F y las rectas AD y BC se cortan en un punto E. Demuestra que las circunferencias circunscritas de los triángulos BFC, AFD, DCE y ABE tienen un punto en común.

Problema 6. Encuentra todas las funciones $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que cumplen que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

para cualesquiera $x, y > 0$.