FASE LOCAL DE LA LXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

Curso 2024-2025.

Propuesta de problemas (con soluciones).

Sesión viernes mañana.

Problema 1. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea M un punto en la diagonal BD que cumple $MD = 2BM$. Las rectas AM y BC se cortan en un punto N. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo MND y el área del paralelogramo $ABCD$?

Solución. Dado un polígono P, escribimos S_P para denotar su área. Como BN es una recta paralela a AD, se cumple que las perpendiculares desde B y N a AD tienen la misma longitud; por lo tanto, los triángulos ABD y AND tienen la misma área. Se tiene entonces que

$$S_{AND} = S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Por otro lado, los triángulos ADM y BNM son semejantes, por tener sus lados paralelos. Como $MD = 2BM$, se cumple también que $AM = 2MN$, o, lo que es lo mismo, $\frac{MN}{AN} = \frac{1}{3}$. Como los triángulos AMD y MND comparten la altura, se tiene que

$$\frac{S_{MND}}{S_{AND}} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente,

$$S_{MND} = \frac{1}{3}S_{AND} = \frac{1}{6}S_{ABCD},$$

por lo que el cociente buscado es $1/6$.

Problema 2. Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple que $q(n) = \frac{1}{n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 2024$. Halla el valor $q(2025)$.

Solución. Consideremos el polinomio $p(x) = xq(x) - 1$, que tiene grado 2024 y se anula en $x = 1, 2, \ldots, 2024$. Por lo tanto,

$$xq(x) - 1 = p(x) = c(x-1)\cdots(x-2024).$$

Evaluando en $x = 0$, nos queda que $-1 = c \cdot 2024!$. Por lo tanto,

$$p(x) = \frac{-1}{2024!}(x-1)\cdots(x-2024),$$

de donde se obtiene que $p(2025) = \frac{-1}{2024!}2024! = -1$. Concluimos que $2025q(2025) - 1 = -1$, por lo que $q(2025) = 0$.

Problema 3. En una pizarra se escribe un número entero positivo n y se saca a un voluntario X que sigue los siguientes pasos:

1. Paso 1. X escribe o bien el número anterior al escrito en la pizarra, o bien el posterior, a su elección (a la vez que borra el anterior número).

2. Paso 2. X escribe el doble del número escrito en la pizarra (de nuevo borrando el anterior número).

Los pasos se repiten en orden 1-2-1-2... indefinidamente. Encontrar para qué números n, el voluntario X puede escribir un cuadrado perfecto en la pizarra en algún momento.

Solución. Veamos que esto es posible para todo n. En primer lugar veamos por inducción que dado $k \in \mathbb{N}$ es posible escribir en la pizarra cualquier número impar entre $2^k n - 2^{k+1} + 1$ y $2^k n + 2^{k+1} - 1$.

Para $k = 1$. En el primer paso podemos llegar a $n-1$ o $n+1$, en el segundo tendremos $2n-2$ o $2n+2$, y al volver a repetir el primer paso alcanzamos $2n-3, 2n-1, 2n+1$ o $2n+3$, que son todos los impares entre $2n-3$ y $2n+3$.

Supongamos que podemos escribir cualquier número impar entre $2^k n - 2^{k+1} + 1$ y $2^k n + 2^{k+1} - 1$, entonces el siguiente paso será multiplicar por 2, con lo que podemos escribir cualquier número par que no sea múltiplo de 4 entre $2^{k+1}n - 2^{k+2} + 2$ y $2^{k+1}n + 2^{k+2} - 2$, es decir, aquellos que son congruentes con 2 módulo 4. Al sumar o restar 1 llegaremos a todos los que son congruentes con 1 ó 3 módulo 4 que están entre $2^{k+1}n - 2^{k+2} + 1$ y $2^{k+1}n + 2^{k+2} - 1$, es decir, los impares entre $2^{k+1}n - 2^{k+2} + 1$ y $2^{k+1}n + 2^{k+2} - 1$.

Solo falta demostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que entre $2^k n - 2^{k+1} + 1$ y $2^k n + 2^{k+1} - 1$ hay un cuadrado perfecto impar.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m^2 \leq 2^k n - 2^{k+1} + 1 \qquad (1)$$

y

$$2^k n - 2^{k+1} + 1 < (m+1)^2.$$

Veamos que podemos tomar k de modo que

$$(m+2)^2 \leq 2^k n + 2^{k+1} - 1.$$

Por reducción al absurdo, si

$$2^k n + 2^{k+1} - 1 < (m+2)^2$$

entonces sumando (1) a la desigualdad obtenemos que

$$2^k n + 2^{k+1} - 1 + m^2 < (m+2)^2 + 2^k n - 2^{k+1} + 1$$

$$\Rightarrow 2^k - \frac{3}{2} < m \Rightarrow \left(2^k - \frac{3}{2}\right)^2 < m^2 \leq 2^k n - 2^{k+1} + 1 \Rightarrow 2^k - 1 + \frac{5}{2^{k+2}} < n$$

lo cual es falso para k suficientemente grande.

Luego entre $2^k n - 2^{k+1} + 1$ y $2^k n + 2^{k+1} - 1$ se encuentran $(m+1)^2$ y $(m+2)^2$, que como son cuadrados consecutivos al menos uno de ellos es impar.

Sesión viernes tarde.

Problema 4. Determina el menor entero positivo n que tiene al menos 4 divisores diferentes a, b, c, d, con $1 < a, b, c, d < n$, de forma que

$$a + b + c + d = 1001.$$

Solución. Supongamos que $1 < a < b < c < d < n$, de forma que existen enteros positivos d_1, d_2, d_3, d_4 de forma que

$$d_1 a = d_2 b = d_3 c = d_4 d = n,$$

con $1 < d_4 < d_3 < d_2 < d_1 < n$. En particular,

$$1001 = a + b + c + d = n\Big(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4}\Big) \leq n\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\Big) = \frac{77n}{60}.$$

Aislando n, se tiene que $n \geq 780$. Para $n = 780$, lo dicho en el enunciado es posible, ya que sus divisores 390, 260, 195 y 156 cumplen que

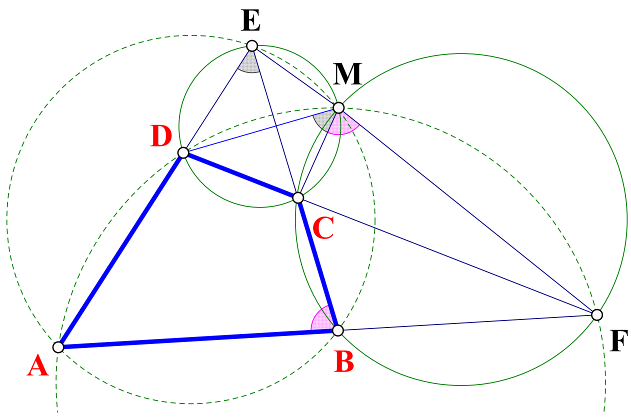
$$390 + 260 + 195 + 156 = 1001.$$

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo de forma que $AB \cap CD = F$ y $AD \cap BC = E$. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BFC, AFD, DCE y ABE tienen un punto en común.

Solución. Sean C y M los puntos de intersección de los circuncírculos de BFC y CDE. Como los cuadriláteros $BFCM$ y $CDEM$ son cíclicos, se cumple que

$$\angle DMF = \angle DMC + \angle CMF = \angle DEC + \angle CBA = 180^\circ - \angle BAE.$$

Por lo tanto, el cuadrilátero $AFMD$ es cíclico y, análogamente, el cuadrilátero $ABME$ también lo es. Por lo tanto, se concluye que el punto M es común a los cuatro circuncírculos.



Problema 6. Encuentra todas las funciones $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que cumplen, para $x, y > 0$ cualesquiera, que

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Solución. Sustituyendo x por $f(x)$, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)y) + f(x),$$

de donde se obtiene que

$$f(f(x)y) = f(f(x)f(y)) - f(x).$$

Cambiando los valores de x e y en la ecuación inicial, obtenemos que

$$f(yf(x)) = f(yx) + y.$$

Comparando ambas expresiones, tenemos la ecuación

$$f(f(x)f(y)) = f(yx) + y + f(x),$$

cuyo lado izquierdo es invariante al intercambiar los papeles de x e y. Por lo tanto,

$$f(xy) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y),$$

de donde se tiene que

$$f(x) - x = f(y) - y.$$

En otras palabras, se cumple que $f(x)-x = c \in (0, +\infty)$. Por lo tanto, cualquier función que pueda satisfacer la ecuación inicial es de la forma $f(x) = x + c$, con $c \in (0, +\infty)$. Para que esa función sea solución, ambos lados de la igualdad tienen que coincidir para cualquier para (x, y), esto es, las dos expresiones siguientes tienen que ser iguales:

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= xf(y) + c = x(y + c) = xy + cx + c, \\ f(xy) + x &= xy + c + x = xy + x + c. \end{aligned}$$

Eso ocurre si, y solamente si, $cx = x$ para todo $x > 0$, lo cual implica que $c = 1$. La única solución es, por lo tanto, $f(x) = x + 1$.