

VI Olimpiada Matemática de Otoño

Programa Hypatia — Vicerrectorado de Estudiantes y Empleabilidad

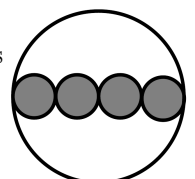
25 de octubre de 2024

Prueba de 2º ESO

- (A) La prueba incluye 15 preguntas para contestar en 90 minutos.
- (B) No se pueden utilizar dispositivos electrónicos.
- (C) Cada pregunta acertada te sumará 4 puntos, cada respuesta en blanco 1 punto y cada respuesta errónea 0 puntos. Si contestas al azar, piensa que las respuestas incorrectas no te darán puntos.
- (D) No es un examen. No se trata de aprobar o suspender. Es un concurso y gana quien consiga más puntos.
- (E) Podría ser difícil contestar en el tiempo indicado a todas las preguntas. Concéntrate en aquellas que consideres más fáciles y que precisen menos tiempo. Cuando las hayas contestado, inténtalo con las demás.
- (F) Muy importante: diviértete y demuestra tu ingenio.

Preguntas:

1. Con el agua que tengo en mi regadera he calculado que podría regar diez rosas o quince claveles. Después de regar ocho rosas, ¿Cuántos claveles puedo regar con el agua que me queda?  
A) Seis                                      B) Cinco                                      C) Cuatro                                      D) Tres
2. La operación favorita de Ana es la diferencia de los cuadrados y ha utilizado el símbolo  $\boxminus$  para representarla:  $a \boxminus b = a^2 - b^2$ . ¿Cuál es el resultado de  $(1 \boxminus 2) \boxminus (3 \boxminus 4)$ ?  
A)  $-40$                                       B)  $0$                                       C)  $7$                                       D)  $-58$
3. Partiendo de un rectángulo, si le disminuimos la base en una quinta parte, y aumentamos su altura en dos terceras partes, podemos decir que (respecto al área del rectángulo original) su área ha:  
A) disminuido en  $\frac{1}{3}$                       B) disminuido en  $\frac{7}{15}$                       C) aumentado en  $\frac{1}{3}$                       D) aumentado en  $\frac{7}{15}$
4. El mínimo común múltiplo de los números naturales que van de 2 al 9, ambos incluidos, es:  
A) 1260                                      B) 1890                                      C) 2520                                      D) 3780
5. Si tres peras pesan igual que dos manzanas, y dos plátanos pesan igual que una manzana, una pera y un plátano juntos, cuál de las siguientes combinaciones de frutas pesa igual que una pera y tres manzanas?  
A) 3 peras                                      B) 3 peras y un plátano                      C) 3 plátanos                                      D) 4 peras
6. ¿Cuántos dígitos (incluyendo decimales si los hubiera) tiene el resultado de la operación  $\frac{20^{40}}{40^{20}}$ ?  
A) 40                                      B) 1                                      C) 21                                      D) Infinitos
7. Cada uno de los 4 círculos pequeños grises de la figura tiene un área de 5 unidades. Cuál es el área de la región blanca interior del círculo grande?



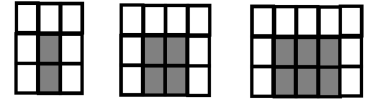
- A) 36                                      B) 48                                      C) 60                                      D) 72

8. Queremos colorear una cuadrícula de  $3 \times 3$  utilizando los colores amarillo, rojo y verde. La única condición es que en cada fila y columna aparezcan los tres colores, como en la figura. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear la cuadrícula?

A	R	V
R	V	A
V	A	R

- A) 12                                      B) 18                                      C) 24                                      D) 27

9. Antonio va colocando fichas grises de dos en dos y Juan las rodea con fichas blancas como ves en las figuras. En la figura que tenga 2024 fichas blancas, ¿cuántas fichas grises habrá?



- A) 4046                                      B) 6069                                      C) 2025                                      D) 4036

10. Si  $-5$  lo sumo con  $-4$ ; luego divido entre  $-3$ , resto  $-2$  y, finalmente multiplico por  $-1$ , el resultado es:

- A) 5    B)  $-5$     C) 0    D)  $-10$

11. Piensa en el mayor número de 4 cifras diferentes que sumen 24. Piensa ahora en el menor número de 4 cifras que sumen 20. Restando esos dos números obtienes:

- A) 8581                                      B) 8481                                      C) 8571                                      D) 8661

12. Tengo seis números que puedo repartir en dos conjuntos de tal manera que el producto de los números de cada conjunto sea el mismo. Los cinco primeros números son 2, 3, 12, 20 y 42. ¿Cuál de los siguientes puede ser el sexto número?

- A) 45    B) 63    C) 105    D) 140

13. El menor número natural que es múltiplo de 18 y 24, y acaba en 8, es:

- A) 408    B) 238    C) 288    D) Ninguno de los anteriores

14. En una floristería colocan todas sus rosas en ramos de 12 flores, sobrando 6. ¿Cuántas rosas sobrarán si compran 2024 rosas más?

- A) 2    B) 0    C) 7    D) 9

15. Tenemos un libro con 382 páginas. ¿Cuántas páginas cumplen que la suma de sus cifras da como resultado un número par?

- A) 189    B) 190    C) 191    D) 192

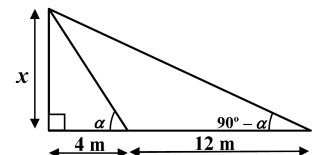
Prueba de 3<sup>o</sup> y 4<sup>o</sup> ESO

- (A) La prueba incluye 15 preguntas para contestar en 90 minutos.
- (B) No se pueden utilizar dispositivos electrónicos.
- (C) Cada pregunta acertada te sumará 5 puntos, cada respuesta en blanco 1 punto y cada respuesta errónea 0 puntos. Si contestas al azar, piensa que las respuestas incorrectas no te darán puntos.
- (D) No es un examen. No se trata de aprobar o suspender. Es un concurso y gana quien consiga más puntos.
- (E) Podría ser difícil contestar en el tiempo indicado a todas las preguntas. Concéntrate en aquellas que consideres más fáciles y que precisen menos tiempo. Cuando las hayas contestado, inténtalo con las demás.
- (F) Muy importante: diviértete y demuestra tu ingenio.

Preguntas:

1. María se encuentra una bolsa repleta de lápices de colores: rojos, naranjas y verdes. Observa que hay 180 que no son rojos, 222 que no son naranjas y 204 que no son verdes. ¿Cuántos lápices verdes hay?
  - A) 182
  - B) 180
  - C) 102
  - D) 101
  - E) 99
2. Si  $\frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{n} = \frac{53}{216}$ , el valor de  $n$  es:
  - A) 6
  - B) 12
  - C) 24
  - D) 36
  - E) 72
3. ¿Cuál es el mayor número natural  $n$  que cumple que el producto de los números naturales del 1 al 30 es múltiplo de  $5^n$ ?
  - A) 1
  - B) 5
  - C) 6
  - D) 7
  - E) 25
4. La descomposición en factores primos de un número es  $a^3 \cdot b^2 \cdot c$ . ¿Cuántos divisores tiene ese número?
  - A) 6
  - B) 9
  - C) 12
  - D) 24
  - E) 32
5. Una persona tarda 20 minutos en limpiar un local, mientras que su compañera tarda 30 minutos. ¿Cuántos minutos tardarán ambas personas juntas?
  - A) 6
  - B) 8
  - C) 10
  - D) 12
  - E) 14

6. Calcula la longitud de  $x$  en la siguiente figura:



- A) 8 m
  - B) 6 m
  - C) 10 m
  - D) 6.5 m
  - E) No hay datos suficientes
7. ¿Cuál es el valor de  $\frac{3^{16} - 2^{16}}{(3^8 + 2^8)(3^4 + 2^4)(3^2 + 2^2)}$ ?
- A) 1
  - B) 2
  - C) 3
  - D) 4
  - E) 5



## Prueba de Bachillerato

- (A) La prueba incluye 15 preguntas para contestar en 90 minutos.
- (B) No se pueden utilizar dispositivos electrónicos.
- (C) Cada pregunta acertada te sumará 5 puntos, cada respuesta en blanco 1 punto y cada respuesta errónea 0 puntos. Si contestas al azar, piensa que las respuestas incorrectas no te darán puntos.
- (D) No es un examen. No se trata de aprobar o suspender. Es un concurso y gana quien consiga más puntos.
- (E) Podría ser difícil contestar en el tiempo indicado a todas las preguntas. Concéntrate en aquellas que consideres más fáciles y que precisen menos tiempo. Cuando las hayas contestado, inténtalo con las demás.
- (F) Muy importante: diviértete y demuestra tu ingenio.

### Preguntas:

1. Si desarrollamos la potencia  $(x^2 - x + 1)^{2024}$  obtenemos un polinomio de grado 4048. ¿Cuál es la suma de los coeficientes de este polinomio?
 

A) 1                      B) 3                      C)  $2^{2024}$                       D)  $3^{2024}$                       E) 2024!
2. Consideremos un triángulo  $T$  que tiene por vértices tres vértices consecutivos de un dodecágono regular de lado 1. El área de  $T$  es igual a
 

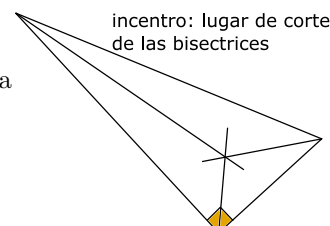
A)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$                       B)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       C)  $\frac{1}{2}\text{sen}(48^\circ)$                       D)  $\frac{1}{3}$                       E)  $\frac{2}{5}$
3. Se yuxtaponen los números del 1 al 999 para formar el número 123456789101112131415...997998999. Este número tiene un número impar de cifras. ¿Qué dígito ocupa la posición central?
 

A) 1                      B) 3                      C) 5                      D) 8                      E) Ninguno de las anteriores
4. Dejamos caer una pelota verticalmente desde una altura de 1 m. Cada vez que rebota en el suelo, la pelota vuelve a subir y alcanza la mitad de la altura que había alcanzado en el bote anterior. Si  $d(t)$  representa la distancia recorrida por la pelota cuando ha pasado un tiempo  $t$ , ¿cuál es el valor de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t)$ ?
 

A) 1                      B)  $\frac{3}{2}$                       C) 2                      D) 3                      E)  $+\infty$
5. ¿Cuántas soluciones (reales) tiene el sistema formado por las ecuaciones  $x^3 + y^3 = 28$  y  $x^2y^2 = 9$ ?
 

A) 3                      B) 4                      C) 6                      D) 9                      E) Infinitas
6. Tenemos un triángulo rectángulo de catetos 5 y 12, ¿cuál es la distancia desde su incentro al vértice en el que se encuentra el ángulo recto?
 

A)  $2\sqrt{2}$                       B) 3                      C)  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$                       D)  $\frac{4}{3}\sqrt{5}$                       E) Ninguna de las anteriores



7. En un torneo participan 10 equipos, de forma que cualesquiera dos de ellos juegan una y solo una vez entre sí. Ganar un enfrentamiento supone 3 puntos para el equipo ganador y 0 para el perdedor, mientras que empatar otorga 1 punto a cada equipo. Cuando termina el torneo, ¿cuál es el máximo número de puntos que puede haber obtenido el último clasificado? (observa que podría estar empatado con otros equipos).
- A) Menos de 11      B) 11      C) 12      D) 13      E) Más de 13
8. De entre los números naturales que tienen a 2 y a 5 por factores primos, pero no tienen ningún otro factor primo, ¿cuántos tienen exactamente 2024 divisores?
- A) Ninguno      B) 10      C) 14      D) 16      E) 800
9. ¿Cuál es la suma de los dígitos de las decenas y las unidades de  $7^{6^5}$ ?
- A) 1      B) 4      C) 7      D) 13      E) Otro
10. ¿Cuál de los siguientes polinomios tiene alguna raíz en común con el polinomio  $x^2 - x - 1$ ?
- A)  $x^4 - 1$       B)  $x^4 - x^2 - 1$       C)  $x^4 + x^2 - 1$       D)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$       E)  $x^4 - x^2 - 2x - 1$
11. Se tienen diez números reales  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ . La media aritmética de  $x_1, x_2, x_3$  es 7, la media aritmética de  $x_4, x_5, x_6, x_7$  es 11 y el mínimo y el máximo de los tres números restantes  $x_8, x_9, x_{10}$  son 5 y 15. ¿Cuál es el intervalo más pequeño en el que podemos asegurar que está la media aritmética de los 10 números?
- A)  $[7, 9]$       B)  $[8, 11]$       C)  $[9, 10]$       D)  $[9, 11]$       E) Ninguno de los anteriores
12. María coge al azar cuatro números distintos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y Ana escoge al azar un número del 1 al 15. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que escoge Ana sea mayor que la suma de los cuatro que escoge María?
- A)  $\frac{3}{8}$       B)  $\frac{1}{5}$       C)  $\frac{3}{10}$       D)  $\frac{5}{8}$       E)  $\frac{2}{3}$
13. Consideremos la ecuación  $n(n + 1) = m^a$ , donde  $a, m, n \geq 1$  son números enteros.
- A) Tiene una solución con  $a = 2$ .      B) Tiene una solución con  $a = 3$ .      C) Tiene una solución con  $a = 5$ .      D) Tiene una solución para  $a > 5$ .      E) No tiene soluciones para  $a \geq 2$ .
14. ¿Cuántos números racionales hay entre  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt[3]{3}$  que se puedan expresar como fracciones con denominador menor o igual que 7?
- A) 0      B) 1      C) 2      D) 3      E) Más de 3
15. En el plano consideramos las rectas paralelas a los ejes  $x = -2$ ,  $x = 2$ ,  $y = -2$  e  $y = 2$ , que delimitan un cuadrado. Hallar el área de la región de este cuadrado que está por debajo de la gráfica de la función  $f(x) = ||x| - |x - 2||$
- A) 12      B) 13      C) 14      D) 15      E) Ninguna de las anteriores