FASE LOCAL DE LA
LXII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA.
Curso 2025-2026.

Esta lista de problemas es una modificación parcial
de la propuesta oficial de la Comisión de Olimpiadas de la RSME.

Primera sesión — Viernes 16 de enero de 2026 (mañana).

Problema 1.

(a) ¿Es posible separar los números del 1 al 60 (ambos incluidos) en 12 conjuntos de 5 números cada uno de forma que la suma de cada conjunto sea la misma?

(b) ¿Es posible separar los números del 1 al 35 (ambos incluidos) en 7 conjuntos de 5 números cada uno de forma que la suma de cada conjunto sea la misma?

Solución.

(a) La respuesta es negativa. Por reducción al absurdo, si pudiéramos separarlos en 12 subconjuntos de la misma suma, pongamos S, entonces tendríamos que

$$12 \cdot S = 1 + 2 + \ldots + 60 = \frac{60 \cdot 61}{2} = 30 \cdot 61.$$

Como este último número no es múltiplo de 12, la suma S no sería un entero, lo cual es una contradicción.

(b) En este caso, la respuesta es afirmativa. La misma idea nos dice en este caso que $7 \cdot S = 1 + 2 + \ldots + 35 = \frac{35 \cdot 36}{2}$, de donde $S = 90$. Podemos hacer, por ejemplo, los siguientes siete conjuntos disjuntos de suma 90:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{1, 8, 18, 28, 35\}\\
C_2 &= \{2, 9, 19, 26, 34\}\\
C_3 &= \{3, 10, 20, 24, 33\}\\
C_4 &= \{4, 11, 21, 22, 32\}\\
C_5 &= \{5, 12, 15, 27, 31\}\\
C_6 &= \{6, 13, 16, 25, 30\}\\
C_7 &= \{7, 14, 17, 23, 29\}.
\end{aligned}$$

Problema 2. Encuentra todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

Solución. Sumando las dos ecuaciones nos queda que

$$x^3 + y^3 = 6(x + y).$$

Usando que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)$, nos quedan dos casos a considerar:

(a) $x = -y$;

(b) $x^2 - xy + y^2 = 6$.

Si $x = -y$, la primera ecuación se escribe como $x^3 = -4x$. Por lo tanto,

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0,$$

de donde tenemos las primeras tres soluciones: $(0,0)$, $(2,-2)$ y $(-2,2)$. Supongamos ahora que $x^2 - xy + y^2 = 6$. Restando las dos ecuaciones tenemos que

$$x^3 - y^3 = 4(x-y).$$

Usando que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, tenemos de nuevo dos opciones:

(a') $x = y$;

(b') $x^2 + xy + y^2 = 4$.

En el caso (a'), sustituyendo $y = x$ en $x^2 - xy + y^2 = 6$ nos queda $x^2 = 6$, lo que deja dos nuevas soluciones $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ y $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$. Tenemos por tanto que el caso que nos queda corresponde a las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones, tenemos que $xy = -1$; sumándolas, vemos que $x^2+y^2 = 5$, por lo que

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 3,$$

lo que quiere decir que $x + y \in \{\pm\sqrt{3}\}$. Por lo tanto, x e y son las soluciones de la ecuación

$$z^2 \pm \sqrt{3}z + 2 = 0.$$

Tomando el caso $+\sqrt{3}$, tenemos las soluciones

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right), \quad \left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right).$$

En el caso $-\sqrt{3}$, nos queda

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right).$$

Esto nos da cuatro soluciones más, para un total de nueve soluciones.

Problema 3. Encuentra todos los enteros no negativos a, b, c que cumplen que

$$3^a + 3^b + 3^c$$

es un cuadrado perfecto.

Solución. Empezamos observando que $3^n \equiv 1, 3 \pmod{8}$ para cualquier $n \geq 0$. Como los cuadros perfectos impares siempre son 1 módulo 8, la única opción es que los tres sumandos sean 3 módulo 8, lo que quiere decir que a, b y c son impares. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $a \geq b \geq c$, y escribir entonces

$$3^a + 3^b + 3^c = 3^c(3^{a-c} + 3^{b-c} + 1).$$

Si $b > c$, entonces $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, lo que quiere decir que la expresión es múltiplo de 3^c, pero no de 3^{c+1}. Si la mayor potencia de 3 que divide es impar, no puede tratarse de un cuadrado perfecto. De forma similar, si $b = c$, pero $a > b$, entonces $3^{a-c} + 3^{b-c} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ y se puede concluir como en el caso anterior. La única posibilidad que falta por considerar es la que corresponde a $a = b = c$. En este caso,

$$3^a + 3^b + 3^c = 3^{a+1},$$

que es un cuadrado perfecto ya que a es impar. Por lo tanto, las soluciones son todas de la forma $(2k + 1, 2k + 1, 2k + 1)$, con $k \geq 0$ un número entero.

Segunda sesión — Viernes 16 de enero de 2026 (tarde).

Problema 4. Se tiene el número de ocho cifras

$$20252026.$$

¿De cuántas formas se pueden reordenar sus dígitos para que el número siga teniendo ocho cifras (es decir, no empiece por cero) y dé resto 2 al dividirlo por 25?

Solución. Los números que dan resto 2 al dividirlos por 25 son los que tienen sus últimas dos cifras iguales a $02, 27, 52, 77$. En nuestro caso, solo tenemos las opciones 02 y 52. Además, como la cifra más significativa (decenas de millón) no puede ser cero, obtenemos los siguientes subcasos muy similares entre sí:

- El número es de la forma $2\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,02$. En los huecos debemos colocar los cinco dígitos restantes $0, 2, 2, 5, 6$. Hay $5! = 120$ permutaciones de cinco elementos, pero al estar el dígito 2 dos veces, cada resultado lo estamos contando dos veces (permutar los dos doses no afecta al número en cuestión). Tendremos así $\frac{120}{2} = 60$ posibles números en este caso.

- El número es de la forma $5\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,02$ y debemos todavía colocar los dígitos $0, 2, 2, 2, 6$. De las 120 permutaciones nos quedamos con $\frac{120}{6} = 20$ distintas, ya que haber tres doses, hay $3! = 6$ permutaciones que no afectan al número.

- El número es de la forma $6\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,02$ y queremos colocar los dígitos $0, 2, 2, 2, 5$. Igual que en el caso anterior, tendremos 20 posibilidades distintas.

- El número es de la forma $2\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,52$ y faltan $0, 0, 2, 2, 6$. De las 120 permutaciones nos quedamos con $\frac{120}{2\cdot 2} = 30$ ya que podemos cambiar de orden los ceros o los doses.

- El número es de la forma $6\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,52$ y falta colocar $0, 0, 2, 2, 2$. En este último caso, de las 120 permutaciones nos quedamos con $\frac{120}{2\cdot 6} = 10$ ya que podemos permutar tanto la pareja de ceros como la terna de doses.

Esto nos da un total de $60 + 20 + 20 + 30 + 10 = 140$ números cumpliendo el enunciado.

Problema 5. En el cuadrilátero $ABCD$ se sabe que $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$ y que $AB = AD = 1$. Determina la longitud de la diagonal AC.

Solución 1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BCD. Como $\angle BOD = 100°$, se tiene que el cuadrilátero $BDAO$ es cíclico con $\angle BOD = \angle BAD$. Al mismo tiempo, tanto A como O se encuentran en la mediatriz del segmento BC, por lo que $A = O$. Esto implica que $AC = 1$.

Solución 2. Supongamos primero que $BC \neq BD$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $BC > BD$. La mediatriz de BD corta a BC en L. Como el triángulo BAD es isósceles, la mediatriz pasa por A, por lo que $DL = BL$ y $AD = AB$. Esto demuestra que los triángulos ABL y ADL son congruentes. Del mismo modo, $\angle BAL = 50°$, por lo que $\angle BLA = 130° - \angle ABC$. Como $\angle ADC = 130° - \angle ABC$, concluimos que $ALCD$ es cíclico. Como $\angle ABC = \angle ADL = \angle ACL$, se tiene que ABC es isósceles y $AC = AB = 1$. Finalmente, si $BC = CD$, tenemos directamente que $\angle ADC = 65° = \angle ACD$, por lo que $AC = AD = 1$.

Problema 6. Consideremos un trapecio isósceles y los seis segmentos correspondientes a sus cuatro lados y a sus dos diagonales. Se eligen tres de esos seis segmentos y resulta que con ellos no se puede formar un triángulo. Demuestra que entonces sí que se puede formar un triángulo con los tres segmentos restantes.

Nota: Un trapecio es isósceles si sus lados no paralelos tienen la misma longitud y sus dos diagonales tienen también la misma longitud.

Solución. Consideremos que AD y BC son las bases del trapecio con $AD = a$ y $BC = b$ y de forma que $a > b$. Los lados laterales tienen la misma longitud: $AB = CD = c$, y lo mismo sucede con las dos diagonales $AC = BD = d$. Vamos a separar casos, según si se han elegido las dos diagonales, una o ninguna. Denotamos por O el punto de corte de las diagonales.

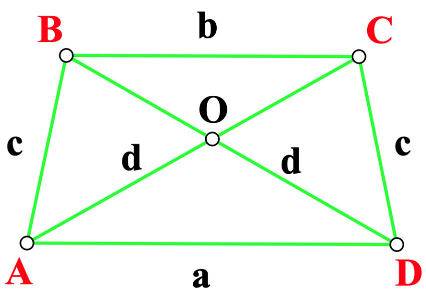

Figura 1: Esquema para resolver el problema 6.

Cuando se han elegido las dos diagonales, también se ha elegido uno de los lados. En ese caso, afirmamos que se puede construir el triángulo con las dos diagonales y dicho lado. Por un lado, se tiene que

$$d + d > AO + OB > c,$$

mientras que

$$d + d > AO + OD > a > b.$$

Por tanto, se cumple la desigualdad triangular y los tres segmentos forman un triángulo.

El razonamiento también nos sirve si no se ha elegido ninguna diagonal, ya que entonces las dos diagonales están entre los tres segmentos restantes no elegidos y es con ellos con los que se puede formar un triángulo.

Supongamos entonces que se ha elegido una única diagonal. Si también se ha elegido una de las bases y uno de los lados no paralelos, entonces los tres segmentos forman claramente un triángulo ya de por sí. Por lo tanto, el único caso que hay que considerar es aquel en el que se han elegido una diagonal y las dos bases, es decir, tenemos que ver que o bien los segmentos de longitudes (a, b, d) forman un triángulo o que lo hacen (c, c, d). Por reducción al absurdo, de no ser el caso, pasaría que $d \geq 2c$ y que o bien $d \geq a$ o $a \geq d + b$. En el primer caso,

$$2d = d + d \geq 2c + (a + b) > 2c + 2b,$$

por lo que $d > c + b$; eso no es posible ya que son las longitudes del triángulo ABC. En el segundo caso,

$$a \geq b + d \geq 2c + b > c + d,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular en ABC. Finalmente, $a > c + d$ es una contradicción con la desigualdad triangular en ACD.