Sesión 1: Aritmética

José M. Manzano
jmprego@ujaen.es

13 de noviembre de 2025

1. Progresiones aritméticas y geométricas

1. Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una progresión aritmética si la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante d, luego se tiene $a_n = a_1 + (n-1)d$ para todo n. Algunos trucos para trabajar con estas sucesiones:
   - No nombrar los términos como $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ sino como
   $$\ldots,\ a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d, \ldots$$
   - Se pueden sumar sus términos sumando el primero con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente.
   - Hay un "término central" solo si hay un número impar de términos.
2. Algunas fórmulas para las sumas de potencias:
$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n &= \tfrac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3+2^3+\ldots+n^3 &= \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+\ldots+n)^3. \end{aligned}$$
3. Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una progresión geométrica si el cociente entre dos términos consecutivos es una constante r, luego se tiene $a_n = a_1 r^{n-1}$.
   a) Para sumar los términos de una progresión geométrica es útil la fórmula
   $$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \text{(válida si } r \neq 1).$$

P1. Demuestra la fórmula de la suma de los primeros n naturales sumando el primero con el último, el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente. ¿Podría funcionar algo parecido para la suma de los cuadrados?

P2. Halla una progresión aritmética de 9 términos cuyo término central es 1 y tal que la suma de los términos en posiciones pares es la misma que la de los términos en posiciones impares.

P3. En pago por el juego del ajedrez, su inventor pidió a un rey del lejano oriente un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente. ¿Pudo cumplir el rey con la petición?

P4. Encuentra todas las sucesiones de al menos tres términos que sean a la vez aritméticas y geométricas.

P5. Cinco enteros positivos están en progresión geométrica y su suma es divisible por el término central. Encuentra la razón de la progresión.

P6. Si tres números están en progresión aritmética, ¿lo están también sus cuadrados? ¿Y los cubos? ¿Y si fueran más de tres números?

2. Divisibilidad

Sean a y d números enteros. Decimos que d divide a a si existe un entero q tal que $a = qd$ (también decimos que d es un divisor de a, que a es divisible por b o que a es un múltiplo de d). Algunas ideas fundamentales en la divisibilidad:

1. Si a divide a b, entonces $|a| \leq |b|$.
2. Si a divide a b y b divide a a, entonces $a = \pm b$.
3. Todos los números dividen a 0 pero 0 únicamente divide al propio 0.
4. Si d divide a a y también a b, entonces divide a $a + rb$ para cualquier entero r.
5. Si $d = ab$ y a y b son primos entre sí (no tienen divisores comunes), ser divisible entre d es lo mismo que ser divisible entre a y b.

En general, dados dos enteros a y d, podemos hacer su **división euclídea**. Esta nos dice que existen enteros q y r únicos tales que

$$a = qd + r,$$

siendo q el **cociente** y $0 \leq r < d$ el **resto** de la división. Otras dos ideas muy importantes:

1. Si queremos calcular el resto de $a + b$, ab o a^n al dividirlos entre q, podemos cambiar a y b por sus restos de dividir entre m y el resultado no cambia.
2. El número d divide a a solamente si $r = 0$.

P7. Demostrar las siguientes afirmaciones sobre números enteros:

1. Si $a-c$ divide a $ab+cd$, entonces también divide a $ad+bc$.
2. Si 6 divide a $a+b+c$, entonces también divide a $a^3+b^3+c^3$.
3. Si 9 divide a $a^2+b^2+c^2$, entonces también divide a alguno de los números a^2-b^2, b^2-c^2, a^2-c^2.
4. Si 21 divide a a^2+b^2, entonces 441 también divide a a^2+b^2.
5. Si $p>3$ es primo, entonces p^2-1 es múltiplo de 24.

P8. ¿Es 1000! divisible entre 10^{1000}?

P9. ¿Existe algún entero n tal que $n^4-2n^3-n^2+2n$ no sea divisible por 24?

P10. ¿Se pueden reordenar las cifras de 2^{2025} para obtener un múltiplo de 9?

P11. ¿Existe algún cuadrado perfecto cuyas cifras sumen 2009?

P12. ¿Cuántos sumandos hay que poner como mínimo en la suma $1+11+111+1111+\ldots$ para que el resultado sea múltiplo de 30?

P13. ¿Cuál es el máximo común divisor de 2^n+1 y 2^n-1?

P14. ¿Cuántos números hay entre 1 y 999 que sean primos relativos con 1000? ¿Y con 7? ¿Y con 36?

3. El conjunto de divisores

Sea $n \geq 2$ un entero descompuesto como producto de factores primos como $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$. Los divisores (positivos) de n son los términos que salen al desarrollar

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{e_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{e_2})\cdots(1+p_r+p_r^2+\ldots+p_r^{e_r}).$$

1. El número de divisores (positivos) de n viene dado por

$$(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_r+1)$$

2. La suma de los divisores de n viene dada por

$$\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{e_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_r^{e_r+1}-1}{p_r-1}.$$

P15. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Qué podemos decir de n si la suma de sus divisores es $n+1$?

(b) ¿Qué podemos decir de n si tiene una cantidad impar de divisores?

(c) ¿Cuál es el menor entero que tiene exactamente 40 divisores?
(d) ¿Cuántos enteros entre 1 y 100 tienen exactamente 6 divisores?
(e) Encuentra un entero n tal que la suma de sus divisores sea $2n$.
(f) Demuestra que la suma de los divisores de $100n$ es mayor que $200n$.
(g) ¿Existe algún entero n que tenga a lo sumo dos factores primos distintos y cuya suma de divisores sea $3n$?

4. Problemas de olimpiada (nivel 1)

P16. (*OMCC-2005*) Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos que pueden expresarse como suma de enteros consecutivos, no necesariamente positivos. ¿Cuál ocupa la posición 2005?

P17. (*ASU-1963*) Sean m y n dos enteros primos entre sí. ¿Qué valores puede tener el máximo común divisor de $m+n$ y m^2+n^2?

P18. (*ASU-1964*) Para cada uno de los números naturales entre 1 y 10^9, calculamos reiteradamente la suma de sus dígitos hasta reducirlos a un número de un sólo dígito. ¿Encontramos más unos o doses entre los 10^9 resultados?

P19. (*OME-2018*) Sea n un número natural. Si la última cifra de 7^n es 3, probar que la penúltima es 4.

P20. (*OME-2007*) Dado un entero positivo k, definimos $a_k = 111 \overset{(k)}{\ldots} 1$ como el número entero que en base diez se escribe con k unos. Demostrar que a_k divide a a_l si y solo si k divide a l.

P21. (*ASU-1964*) Demostrar que $m(m-1)$ no es la potencia de ningún número entero para ningún número natural m.

P22. (*IMO-1964*) (a) Encontrar los enteros positivos n tales que 2^n-1 es divisible por 7.
(b) Demostrar que no hay enteros positivos n tales que 2^n+1 es divisible por 7.

Soluciones en *Problemas de Mates*

5. Problemas de olimpiada (nivel 1,5)

P23. (*OME-1994*) Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

P24. (*OME-1994*) Determinar todos los números naturales n tales que

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

tiene exactamente tres divisores primos.

P25. (*OME-1988*) Demostrar que los binomios $25x+31y$ y $3x+7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores enteros de x e y.

P26. (*OME-1992*) Un número N es múltiplo de 83 y su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar N sabiendo que es el menor entero que cumple estas condiciones.

P27. (*OME-1977*) Demostrar que la suma de los cuadrados de cinco enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

P28. (*USAMO-1972*) Demostrar que

$$\frac{(\operatorname{mcm}(a,b,c))^2}{\operatorname{mcm}(a,b)\operatorname{mcm}(b,c)\operatorname{mcm}(c,a)}=\frac{(\operatorname{mcd}(a,b,c))^2}{\operatorname{mcd}(a,b)\operatorname{mcd}(b,c)\operatorname{mcd}(c,a)}$$

para cualesquiera enteros positivos a, b, c.

Soluciones en *Problemas de Mates*

6. Problemas de olimpiada (nivel 2)

P29. (*OMA-2024*) Encontrar todos los números enteros positivos $n < 1000$ tales que las cuatro últimas cifras de n^2 pueden reordenarse para formar el número 2024.

P30. (*OME-2007*) Dada la sucesión $a_n = 1+n^3$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar $\operatorname{mcd}(a_n, a_{n+1})$?

P31. (*OME-2011*) La última cifra de 2009^{2011} es un nueve pero, ¿cuántos ceros preceden a ese nueve?

P32. (*ASU-1962*) Dados tres números enteros distintos $x, y, z \in \mathbb{Z}$, demostrar que $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ es divisible entre $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Soluciones en *Problemas de Mates*