Sesión 2: Combinatoria

José M. Manzano
jmprego@ujaen.es

20 de noviembre de 2025

1. Preámbulo

Un conjunto es una reunión de objetos y no pueden estar repetidos. Podemos escribirlos entre llaves o dar una descripción precisa. Por ejemplo, podemos escribir $\{1,3,5,7,9\}$ o bien decir que se trata del conjunto de enteros impares entre 1 y 9. Dados dos conjuntos A y B:

1. A es un subconjunto de B si todo elemento de A es elemento de B,
2. $A \cap B$ es la intersección (sus elementos están en A y en B),
3. $A \cup B$ es la unión (sus elementos están en A o en B o en $A \cap B$),
4. $A - B$ es la diferencia (sus elementos están en A pero no en B),
5. $A \times B$ es el producto cartesiano (sus elementos son parejas ordenadas formadas por un elemento de A y otro de B),
6. $|A|$ es el cardinal o número de elementos de A.

No es que sea indispensable saber estas cosas, pero nos ayudan mucho a expresar ideas que de otra forma requieren muchas palabras.

2. Técnicas para contar

1. **Principio multiplicativo.** Si un proceso se realiza en k etapas independientes entre sí, y la primera etapa puede hacerse de n_1 maneras diferentes, la segunda de n_2 maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número total de formas de realizar el proceso completo es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$.

   Una alternativa cuando las etapas no son independientes es realizar el conteo haciendo un diagrama de árbol.

2. **Principio de inclusión-exclusión.** Para contar los elementos de la unión de varios conjuntos, no podemos contar los elementos comunes más de una vez. Para dos conjuntos finitos A y B, tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Para tres conjuntos,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

La idea clave es:

- Primero *incluimos* las cantidades individuales.
- Luego *excluimos* las intersecciones dobles porque se han contado dos veces.
- Finalmente, volvemos a *incluir* las intersecciones triples, que quedaron restadas en exceso.

Esto se puede adaptar fácilmente a más de tres conjuntos. El principio permite calcular el número de objetos que cumplen varias condiciones simultáneamente.

3. **Permutaciones.** Si tenemos n objetos, hay exactamente $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ formas de reordenarlos.

Por ejemplo, las letras $ABCD$ se pueden reordenar de 24 formas:

ABCD	ABDC	ADBC	ADCB	ACBD	ACDB
BACD	BADC	BDAC	BDCA	BCDA	BCAD
CABD	CADB	CDAB	CDBA	CBAD	CBDA
DABC	DACB	DBAC	DCBA	DCAB	SCBA

P1. ¿Cuántos números hay entre 1 y 1000 que no son múltiplos de 2 ni de 3 ni de 5?

P2. Determinar la mayor potencia de 2 que divide a 100!.

P3. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar (hay 27 letras en español)? ¿Y si no dejamos que haya vocales en las posiciones impares? ¿Y si tampoco dejamos que haya consonantes en las posiciones pares?

P4. ¿De cuántas formas se pueden sentar 10 personas en 10 sillas distintas numeradas del 1 al 10? ¿Y si sólo hubiera 5 sillas y 5 personas deben quedarse de pie?

P5. En la Olimpiada Matemática en Jaén se han presentado 83 participantes. ¿De cuántas formas posibles pueden repartirse los tres primeros premios?

P6. En la clase de gimnasia, el profesor hace un grupo de seis estudiantes y les da a cada uno una pelota. Cuando suena el silbato, deben pasarla de forma que cada integrante del grupo reciba una pelota. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

P7. En una reunión van a hablar 10 personas, entre las cuales están a Asun y a Pepo. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los discursos de las 10 personas? ¿Y si queremos que Asun hable justo antes que Pepo? ¿Y si queremos que Asun hable en cualquier momento pero antes que Pepo?

P8. Diez estudiantes de un colegio tienen sus camisetas numeradas del 1 al 10 y hay 10 sillas también numeradas del 1 al 10. ¿De cuántas formas pueden sentarse en las sillas? ¿Y si no permitimos que nadie se siente en la silla con su mismo número?

3. Combinaciones

El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Esto refleja una situación en que todos los elementos son distinguibles pero no importa el orden en que se elijan. Observa que tiene que ser $0 \leq k \leq n$ y que $0! = 1$ para que la fórmula también funcione si $k = 0$ o $k = n$.

P9. Demostrar que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

y ver que esta es justo la propiedad que define al triángulo de Tartaglia (o de Pascal). Deducir que todos los números combinatorios son enteros.

P10. Demostrar que el producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.

P11. Probar que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos y concluir que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

P12. Responder a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántos triángulos distintos hay cuyos vértices son vértices de un octógono regular dado? ¿Y pentágonos?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden pintar 20 puntos dados en el plano si cada uno de ellos ha de pintarse de rojo o de verde?

(c) ¿De cuántas formas se puede dividir una clase de 20 estudiantes en dos equipos de 10 de forma que Paquita y Juanito estén en equipos distintos?

P13. En una clase hay 25 estudiantes y la profesora quiere hacer grupos de 5 para asignarle a cada grupo un trabajo distinto. ¿De cuántas formas puede hacer la división?

P14. En el plano, queremos llegar desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(27,34)$. Sólo se permite hacer movimientos de una unidad hacia la derecha o hacia arriba. ¿Cuántos caminos posibles hay?

P15. Tenemos 12 bolas numeradas del 1 al 12 de las cuales 4 son rojas, 4 verdes y 4 azules. ¿De cuántas maneras distintas se pueden escoger 7 de las 12 bolas si atendemos únicamente al número? ¿Y si atendemos únicamente al color?

P16. En una comisión hay 20 personas, 11 de las cuales son mujeres. Se quiere crear una subcomisión con 6 personas y se quiere que al menos la mitad sean mujeres. ¿De cuántas formas puede hacerse la elección?

P17. En una clase hay 5 estudiantes y el profesor de matemáticas decide repartir caramelos por su cumpleaños. Tiene un total de 30 caramelos (todos iguales). ¿De cuántas formas puede repartirlos? ¿Y si quiere que nadie se quede sin caramelos?

P18. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 20?$$

¿Y si pedimos que $x_i \geq 1$ para todo i? ¿Y si pedimos que $1 \leq x_i \leq 2$ para todo i? ¿Y si pedimos que $1 \leq x_i \leq 3$ para todo i?

P19. En una clase, los 25 estudiantes se colocan en fila india y la profesora decide elegir a 7 de ellos pero no quiere elegir dos consecutivos en la fila. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

P20. Pintamos cada número del 1 al 30 de un color de entre tres distintos. ¿De cuántas formas se puede hacer esto? ¿Y si pedimos que haya al menos un número de cada color? ¿Y si pedimos que haya al menos dos números de cada color?

P21. En una clase hay 12 niños con dorsales del 1 al 12 y también 12 niñas con dorsales del 1 al 12. ¿De cuántas formas pueden colocarse en fila todo el grupo? ¿Y si pedimos que las niñas estén ordenadas de menor a mayor de acuerdo a sus dorsales? ¿Y si pedimos que tanto los niños como las niñas estén ordenados?

P22. ¿De cuántas formas se pueden distribuir $a+b+c$ objetos en tres grupos de forma que el primer grupo tenga a elementos, el segundo tenga b elementos y el tercero tenga c elementos?

4. El binomio de Newton

Al desarrollar el binomio $(x+y)^n$, tenemos que multiplicar $x+y$ por sí mismo n veces, luego tendremos siempre sumandos del tipo $x^{n-k}y^k$. Este sumando saldrán $\binom{n}{k}$ veces ya que hay que ver en qué k factores $x+y$ elegimos y. Por lo tanto, se tiene que

$$(x+y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n.$$

A los números combinatorios también se les llama coeficientes binomiales. Se distribuyen normalmente en el triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

P23. ¿Cuál es el coeficiente de x^7 en $(1+x)^{12}$? ¿Y en $(1+x+x^2)^{12}$?

P24. Al desarrollar $(\sqrt{x} - 2\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{48}$, determinar el término independiente (si lo hay).

P25. (a) Demuestra que en cada fila del triángulo de Tartaglia, los elementos en las posiciones pares suman lo mismo que los de las posiciones impares.

(b) Demuestra que la suma de los cuadrados de los elementos de la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia es igual a $\binom{2n}{n}$.

5. Problemas de olimpiada (nivel 1)

P26. (*OME-1975*) Se considera el conjunto C de todos los vectores de r componentes, cada una de las cuales es igual a 1 o -1. Calcular la suma de todas las componentes de todos los elementos de C excluyendo al vector $(1,1,\ldots,1)$.

P27. (*ASU-1976*) Determinar si se pueden etiquetar los vértices de un cubo con números distintos de tres dígitos en binario (del 000 al 111) de forma que los números de dos vértices adyacentes difieren en al menos dos dígitos.

P28. (*OME-1970*) En los exámenes de sexto curso de cierto centro, aprueban la Física, al menos, el 70 % de los alumnos; las Matemáticas, al menos, el 75 %; la Filosofía, al menos, el 90 %; y el Inglés, al menos, el 85 %. ¿Cuántos alumnos, al menos, aprueban esas cuatro asignaturas?

P29. (*OME-1965*) ¿Cuántos números de tres cifras (es decir, mayores que 99 y menores que 1000) hay que tengan su cifra central mayor que las otras dos? ¿Cuántos de ellos tienen además las tres cifras distintas?

P30. (*OMCC-2011*) En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a este. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

P31. (*OME-2007*) Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

P32. (*OME-1969*) Una bolsa contiene cubos de plástico del mismo tamaño cuyas caras se pintan cada una de un color distinto de entre seis colores: blanco, rojo, amarillo, verde, azul y violeta. ¿Cuántos de estos cubos puede haber distinguibles entre sí?

Soluciones en *Problemas de Mates*

6. Problemas de olimpiada (nivel 1,5)

P33. (*OME-1997*) Seis músicos participan en un festival de música. En cada concierto, algunos de esos músicos tocan y los demás escuchan. ¿Cuál es el mínimo número de conciertos necesario para que cada músico escuche a todos los demás?

P34. (*ASU-1963*) Dado un conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ formado por al n números reales positivos distintos, consideremos todas las sumas de los elementos de los subconjuntos no vacíos de S. Demostrar que hay al menos $\frac{n(n+1)}{2}$ sumas distintas.

P35. (*OME-2003*) ¿Cuántas ternas ordenadas de números enteros y positivos (a, b, c) distintos de la unidad hay tales que $abc = 7^{39}$?

P36. (*USAMO-1972*) Un generador de números aleatorios elige con la misma probabilidad uno de los nueve dígitos $1, 2, \ldots, 9$. Hallar la probabilidad de que después de generar n números, su producto sea divisible por 10.

Soluciones en *Problemas de Mates*

7. Problemas de olimpiada (nivel 2)

P37. (*OME-1995*) Un subconjunto A de $M = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ se dice *majo* si para cualquier entero k tal que $2k \in A$, se tiene que $2k-1 \in A$ y $2k+1 \in A$. El subconjunto vacío $A = \emptyset$ y el total $A = M$ son majos. ¿Cuántos subconjuntos majos tiene M?

P38. (*OME-1996*) Sea A un conjunto de 8 elementos. Hallar el máximo número de subconjuntos de A, de tres elementos cada uno, tales que no hay dos de ellos cuya intersección tenga exactamente dos elementos.

P39. (*OME-1998*) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) ¿Cuantas funciones $f : A \to A$ verifican $f(f(x)) = x$ para todo $x \in A$?

(b) ¿Cuantas funciones $f : A \to A$ verifican $f(f(f(f(x)))) = x$ para todo $x \in A$?

P40. (*OME-2012*) Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ son los vértices de un polígono regular de $2n + 1$ lados. Hallar el número de ternas (A_i, A_j, A_k) tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo.

Soluciones en *Problemas de Mates*