Sesión 1: Aritmética

José M. Manzano
jmprego@ujaen.es

6 de noviembre de 2026

1. Calentamiento

Para empezar, diez preguntas rápidas. Todas se resuelven en una o dos líneas si se da con la idea adecuada (factorizar, agrupar bien los términos, fijarse en los restos...); no hace falta hacer cuentas largas.

C1. Demuestra que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$; es decir, que la suma de los n primeros números impares es siempre un cuadrado perfecto.

C2. Demuestra que la suma de cinco enteros consecutivos es siempre múltiplo de 5. ¿Es también la suma de cuatro enteros consecutivos múltiplo de 4?

C3. Si tres enteros positivos a, b y c están (en este orden) en progresión geométrica, demuestra que ac es un cuadrado perfecto.

C4. ¿Son primos los números 899 y 1 000 027?

C5. Demuestra que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7 para todo entero $n \geq 1$.

C6. Demuestra que todo número de seis cifras de la forma $\overline{abcabc}$ (como 274 274) es divisible por 7, por 11 y por 13.

C7. ¿Qué resto se obtiene al dividir 10^{2027} entre 9? ¿Y al dividirlo entre 11?

C8. Demuestra que 2027 no se puede escribir como suma de dos cuadrados perfectos.

C9. Demuestra que dos enteros consecutivos son siempre primos entre sí. ¿Lo son también n y $2n+1$?

C10. ¿Cuántos divisores positivos tiene 1 000 000? ¿Cuántos de ellos son impares?

2. Progresiones aritméticas y geométricas

1. **Progresiones aritméticas.** Decimos que una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una *progresión aritmética* cuando cada término se obtiene sumando al anterior una constante d, llamada *diferencia*; es decir, cuando $a_{n+1} = a_n + d$ para todo n. En tal caso, se tiene $a_n = a_1 + (n-1)d$ para todo n. Algunas ideas útiles para trabajar con estas sucesiones:

   - Tres números a, b, c están en progresión aritmética si y solo si $2b = a + c$, es decir, si el término central es la media aritmética de los otros dos.
   - Suele ser cómodo nombrar los términos de forma simétrica alrededor del centro. Por ejemplo, cinco términos consecutivos se pueden llamar

     $$a - 2d, \quad a - d, \quad a, \quad a + d, \quad a + 2d$$

     en lugar de a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ y $a + 4d$. Si el número de términos es par, por ejemplo cuatro, se pueden llamar $a - 3d$, $a - d$, $a + d$ y $a + 3d$ (en este caso, la diferencia es $2d$).
   - Para sumar los términos, se suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente: todas estas parejas suman lo mismo. De este modo se obtiene

     $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

   - Hay un *término central* solo si el número de términos es impar. En tal caso, la suma de todos los términos es igual al número de términos multiplicado por el término central.

2. **Progresiones geométricas.** Decimos que una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una *progresión geométrica* cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante r, llamada *razón*; es decir, cuando $a_{n+1} = r\, a_n$ para todo n. En tal caso, se tiene $a_n = a_1 r^{n-1}$ para todo n.

   - Tres números no nulos a, b, c están en progresión geométrica si y solo si $b^2 = ac$. Si los tres son positivos, esto significa que $b = \sqrt{ac}$ es la media geométrica de a y c.
   - También aquí puede ser útil nombrar los términos de forma simétrica: $\ldots,\ \frac{a}{r^2},\ \frac{a}{r},\ a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots$
   - Para sumar los términos es útil la fórmula

     $$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad \text{(válida si } r \neq 1\text{)},$$

     que se obtiene llamando S a la suma y calculando $rS - S$, ya que casi todos los términos se cancelan. En consecuencia, si $r \neq 1$, la suma de los n primeros términos de la progresión es $a_1(r^n - 1)/(r - 1)$.

3. **Sumas de potencias.** Conviene recordar también las siguientes fórmulas:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

P1. Demuestra la fórmula de la suma de los n primeros números naturales sumando el primero con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente. ¿Podría funcionar algo parecido para la suma de los cuadrados?

P2. ¿Existe alguna progresión aritmética de 9 términos cuyo término central sea 1 y en la que la suma de los términos que ocupan posiciones pares coincida con la de los que ocupan posiciones impares?

P3. Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez pidió como recompensa a un rey del Lejano Oriente un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente hasta la casilla 64. ¿Pudo el rey cumplir con la petición?

P4. Encuentra todas las sucesiones de al menos tres términos que sean a la vez progresiones aritméticas y geométricas.

P5. Cinco enteros positivos están en progresión geométrica y su suma es divisible por el término central. Encuentra la razón de la progresión.

P6. Si tres números están en progresión aritmética, ¿lo están también sus cuadrados? ¿Y sus cubos? ¿Y si fueran más de tres números?

3. Divisibilidad

En esta sección, todas las letras representan números enteros. Decimos que d *divide* a a, y escribimos $d \mid a$, si existe un entero q tal que $a = qd$. También decimos que d es un *divisor* de a, que a es *divisible* por d o que a es un *múltiplo* de d. Algunas propiedades básicas:

1. Todo entero divide a 0, pero 0 solo divide a 0. Además, 1 y -1 dividen a cualquier entero.
2. Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$. En particular, un entero no nulo tiene una cantidad finita de divisores.
3. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = \pm b$.

4. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.
5. Si $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid ra+sb$ para cualesquiera enteros r y s. En particular, d divide a $a+b$ y a $a-b$.

Primos, mcd y mcm. Un entero $p \geq 2$ es *primo* si sus únicos divisores positivos son 1 y p. El *teorema fundamental de la aritmética* afirma que todo entero $n \geq 2$ se puede escribir como producto de números primos, y que esta descomposición es única salvo el orden de los factores. Una consecuencia muy útil: si un primo p divide a un producto ab, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

Dados dos enteros a y b, no ambos nulos, su *máximo común divisor* $\mathrm{mcd}(a,b)$ es el mayor entero que divide a ambos; si a y b son no nulos, su *mínimo común múltiplo* $\mathrm{mcm}(a,b)$ es el menor entero positivo que es múltiplo de ambos. Decimos que a y b son *primos entre sí* (o *coprimos*) si $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$, es decir, si sus únicos divisores comunes son 1 y -1.

1. Todo divisor común de a y b divide también a $b - ra$, y viceversa. Por tanto, $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a, b-ra)$ para cualquier entero r. Aplicando esta idea repetidamente (*algoritmo de Euclides*) se puede calcular el mcd sin necesidad de factorizar.
2. Si a y b son primos entre sí, ser múltiplo de ab equivale a ser múltiplo de a y de b. Por ejemplo, un número es múltiplo de 12 si y solo si lo es de 3 y de 4 (¡pero no basta con que lo sea de 2 y de 6!).

División euclídea y congruencias. Dados dos enteros a y m, con $m \geq 1$, la *división euclídea* de a entre m nos dice que existen dos enteros q y r, únicos, tales que

$$a = qm + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r < m;$$

q es el *cociente* y r el *resto* de la división. Por supuesto, $m \mid a$ si y solo si $r = 0$.

Decimos que a y b son *congruentes módulo* m, y escribimos $a \equiv b \pmod{m}$, si dan el mismo resto al dividirlos entre m o, equivalentemente, si $m \mid a - b$. Las congruencias se pueden sumar, restar, multiplicar y elevar a potencias igual que las igualdades: si $a \equiv a' \pmod{m}$ y $b \equiv b' \pmod{m}$, entonces

$$a \pm b \equiv a' \pm b', \qquad ab \equiv a'b', \qquad a^n \equiv a'^n \pmod{m}.$$

En la práctica, esto significa que, para calcular el resto de $a+b$, ab o a^n al dividir entre m, podemos sustituir a y b por sus restos (o por cualquier número congruente con ellos, como -1 en lugar de $m-1$) sin que cambie el resultado. Por ejemplo, como $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$, se tiene que $2^{100} = (2^2)^{50} \equiv (-1)^{50} = 1 \pmod{5}$; es decir, 2^{100} deja resto 1 al dividirlo entre 5. En cambio, en general no se puede simplificar un factor común: $2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 1 \pmod{4}$, pero $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$.

Algunos hechos útiles. Las siguientes ideas aparecen constantemente en los problemas de divisibilidad:

1. Entre k enteros consecutivos hay exactamente uno que es múltiplo de k. Así, el producto de dos enteros consecutivos es siempre par, y el de tres enteros consecutivos es siempre múltiplo de 2 y de 3, luego de 6.
2. Como $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, el número $a-b$ divide a $a^n - b^n$. Si n es impar, cambiando b por $-b$ se obtiene que $a+b$ divide a $a^n + b^n$.
3. Todo cuadrado perfecto deja resto 0 o 1 al dividirlo entre 3, y también al dividirlo entre 4 (basta elevar al cuadrado los posibles restos).

Criterios de divisibilidad. Escribimos $\overline{a_k \ldots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ para denotar el número cuyas cifras son $a_k, \ldots, a_1, a_0$. De esta expresión se deducen los criterios de divisibilidad habituales:

- Como 10 es múltiplo de 2 y de 5, un número es divisible por 2 o por 5 si y solo si lo es su última cifra. Del mismo modo, como 100 es múltiplo de 4 y de 25, y 1000 lo es de 8, basta mirar las dos últimas cifras para la divisibilidad por 4 y por 25, y las tres últimas para la divisibilidad por 8.
- Como $10 \equiv 1 \pmod 9$, un número y la suma de sus cifras dan el mismo resto al dividirlos entre 9 (y, por tanto, también entre 3). En particular, un número es divisible por 3 o por 9 si y solo si lo es la suma de sus cifras.
- Como $10 \equiv -1 \pmod{11}$, un número da el mismo resto al dividirlo entre 11 que la suma alternada de sus cifras, empezando por las unidades: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$. En particular, un número es divisible por 11 si y solo si lo es esa suma alternada.

P7. Demuestra las siguientes afirmaciones sobre números enteros:

(a) Si $a-c$ divide a $ab+cd$, entonces también divide a $ad+bc$.

(b) Si 6 divide a $a+b+c$, entonces también divide a $a^3+b^3+c^3$.

(c) Si 9 divide a $a^2+b^2+c^2$, entonces también divide a alguno de los números a^2-b^2, b^2-c^2, a^2-c^2.

(d) Si 21 divide a a^2+b^2, entonces 441 también divide a a^2+b^2.

(e) Si $p>3$ es primo, entonces p^2-1 es múltiplo de 24.

P8. ¿Es 1000! divisible entre 10^{1000}? (Recuerda que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.)

P9. ¿Existe algún entero n tal que $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ no sea divisible por 24?

P10. ¿Se pueden reordenar las cifras de 2^{2025} para obtener un múltiplo de 9?

P11. ¿Existe algún cuadrado perfecto cuyas cifras sumen 2009?

P12. ¿Cuántos sumandos hay que poner como mínimo en la suma $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots$ para que el resultado sea múltiplo de 30?

P13. ¿Cuál es el máximo común divisor de $2^n + 1$ y $2^n - 1$?

P14. ¿Cuántos números entre 1 y 999 son coprimos con 1000? ¿Y con 7? ¿Y con 36?

4. El conjunto de divisores

En esta sección, cuando hablemos de divisores nos referiremos siempre a divisores positivos. Sea $n \geq 2$ un entero cuya descomposición en factores primos es

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r},$$

donde $p_1, \ldots, p_r$ son primos distintos y $e_1, \ldots, e_r \geq 1$. Los divisores de n son exactamente los números de la forma $p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$ con $0 \leq f_i \leq e_i$ para cada i; dicho de otro modo, son los sumandos que aparecen al desarrollar el producto

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{e_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{e_2}) \cdots (1 + p_r + p_r^2 + \cdots + p_r^{e_r}).$$

De aquí se deduce lo siguiente:

1. El número de divisores de n es $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1)$.
2. La suma de los divisores de n es el valor del producto anterior, es decir,

$$\frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

   Por ejemplo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ tiene $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ divisores, cuya suma es $(1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5) = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170$.
3. El número n es un cuadrado perfecto si y solo si todos los exponentes $e_1, \ldots, e_r$ son pares. Más en general, n es una potencia k-ésima si y solo si todos los exponentes son múltiplos de k.
4. Si escribimos dos enteros positivos a y b como productos de los mismos primos (permitiendo exponentes nulos), su mcd se obtiene tomando cada primo con el menor de sus dos exponentes, y su mcm, con el mayor. En consecuencia, $\text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = ab$.

P15. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Qué podemos decir de n si la suma de sus divisores es $n + 1$?

(b) ¿Qué podemos decir de n si tiene una cantidad impar de divisores?

(c) ¿Cuál es el menor entero positivo que tiene exactamente 40 divisores?

(d) ¿Cuántos enteros entre 1 y 100 tienen exactamente 6 divisores?

(e) Encuentra un entero positivo n tal que la suma de sus divisores sea $2n$.

(f) Demuestra que, para todo entero positivo n, la suma de los divisores de $100n$ es mayor que $200n$.

(g) ¿Existe algún entero n con a lo sumo dos factores primos distintos y cuya suma de divisores sea $3n$?

5. Problemas de olimpiada (nivel 1)

P16. (*OMCC-2005*) Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos que pueden expresarse como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos. ¿Cuál ocupa la posición 2005?

P17. (*ASU-1963*) Sean m y n dos enteros primos entre sí. ¿Qué valores puede tener el máximo común divisor de $m+n$ y m^2+n^2?

P18. (*ASU-1964*) Para cada uno de los números naturales entre 1 y 10^9, calculamos reiteradamente la suma de sus dígitos hasta reducirlos a un número de un sólo dígito. ¿Encontramos más unos o doses entre los 10^9 resultados?

P19. (*OME-2018*) Sea n un número natural. Si la última cifra de 7^n es 3, probar que la penúltima es 4.

P20. (*OME-2007*) Dado un entero positivo k, definimos $a_k = 111\overset{(k)}{\ldots}1$ como el número entero que en base diez se escribe con k unos. Demostrar que a_k divide a a_l si y solo si k divide a l.

P21. (*ASU-1964*) Demostrar que $m(m-1)$ no es la potencia de ningún número entero para ningún número natural m.

P22. (*IMO-1964*) (a) Encontrar los enteros positivos n tales que 2^n-1 es divisible por 7.

(b) Demostrar que no hay enteros positivos n tales que 2^n+1 es divisible por 7.

Soluciones en *Problemas de Mates*

6. Problemas de olimpiada (nivel 1,5)

P23. (*OME-1994*) Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

P24. (*OME-1994*) Determinar todos los números naturales n tales que

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

tiene exactamente tres divisores primos.

P25. (*OME-1988*) Demostrar que los binomios $25x + 31y$ y $3x + 7y$ son múltiplos de 41 para los mismos valores enteros de x e y.

P26. (*OME-1992*) Un número N es múltiplo de 83 y su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar N sabiendo que es el menor entero que cumple estas condiciones.

P27. (*OME-1977*) Demostrar que la suma de los cuadrados de cinco enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

P28. (*USAMO-1972*) Demostrar que

$$\frac{(\operatorname{mcm}(a,b,c))^2}{\operatorname{mcm}(a,b)\operatorname{mcm}(b,c)\operatorname{mcm}(c,a)} = \frac{(\operatorname{mcd}(a,b,c))^2}{\operatorname{mcd}(a,b)\operatorname{mcd}(b,c)\operatorname{mcd}(c,a)}$$

para cualesquiera enteros positivos a, b, c.

Soluciones en *Problemas de Mates*

7. Problemas de olimpiada (nivel 2)

P29. (*OMA-2024*) Encontrar todos los números enteros positivos $n < 1000$ tales que las cuatro últimas cifras de n^2 pueden reordenarse para formar el número 2024.

P30. (*OME-2007*) Dada la sucesión $a_n = 1 + n^3$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar $\operatorname{mcd}(a_n, a_{n+1})$?

P31. (*OME-2011*) La última cifra de 2009^{2011} es un nueve pero, ¿cuántos ceros preceden a ese nueve?

P32. (*ASU-1962*) Dados tres números enteros distintos $x, y, z \in \mathbb{Z}$, demostrar que $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ es divisible entre $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Soluciones en *Problemas de Mates*

Test de repaso

Cada pregunta tiene una única respuesta correcta. Ninguna requiere cuentas largas: todas se deducen de lo que hemos visto en esta sesión.

1. Siete números en progresión aritmética suman 91. ¿Cuál es el término central?

(A) 7 (B) 13 (C) 14 (D) 26 (E) Depende

2. ¿Cuánto vale $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$?

(A) 121 (B) 243 (C) 363 (D) 364 (E) 728

3. ¿Qué cifra hay que escribir en lugar de $*$ para que el número de cuatro cifras $72*4$ sea múltiplo de 9?

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 9

4. ¿Qué resto se obtiene al dividir 2^{2027} entre 5?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5. Solo uno de los siguientes números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál?

(A) 1 000 001 (B) 1 002 001 (C) 2 000 002 (D) 2 000 003 (E) 5 000 000

6. ¿Cuánto vale $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 20^3$?

(A) 24 025 (B) 39 744 (C) 41 075 (D) 44 100 (E) 46 655

7. ¿Cuál de los siguientes números **no** divide a $2^{12} - 1$?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 13 (E) 17

8. Un número n tiene exactamente tres divisores positivos. ¿Cuántos tiene n^2?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) Depende