Diego García Zamora

18 de marzo de 2022

Problema 1. *Sophie está apoyada sobre una mesa circular y recibe un WhatsApp en el que se indica un número positivo junto con el mensaje "Desplázate alrededor de la mesa, a izquierda o derecha y tantas veces como quieras, una distancia l_1 y verás cómo aparece un reloj". Muerta de curiosidad, decide desplazarse a lo largo del borde de la mesa la distancia l_1 (que supone más de la mitad del perímetro de la mesa), y después la misma distancia l_1, y así sucesivamente, hasta darse cuenta de que siempre llega a los mismos 12 puntos del borde de la mesa. A continuación, Sophie recibe otro WhatsApp con otro número l_2, mayor que el anterior y menor que el perímetro de la mesa, al que sigue un mensaje similar al primero. Vuelve a probar y se desplaza esta vez una distancia l_2 a lo largo del borde de la mesa y procede como antes hasta comprobar que también esta vez el mensaje es cierto y que siempre llega a los mismos 12 puntos del borde de la mesa. A partir de los valores l_1 y l_2, ¿puede calcular Sophie el área de la superficie de la mesa? En caso afirmativo, indica cómo hacerlo.*

Como se indica que los 12 puntos formados al desplazarse las distancias l_1 o l_2 a lo largo del perímetro de la mesa forman un reloj, podemos describir la posición de tales puntos con los valores (R, α_m), donde $R > 0$ es el radio de la mesa y $\alpha_m := m\frac{2\pi}{12} = m\frac{\pi}{6}$, $m \in \{0, 1, ..., 11\}$ representa el ángulo correspondiente (suponemos que el lugar donde Sophie estaba apoyada inicialmente se representa con el par (R, α_0)).

Denotemos por $A = \{\alpha_m \ : \ m \in \{0, 1, ..., 11\}\}$ al conjunto de los ángulos que determinan el reloj. Diremos que $m_0\frac{\pi}{6} \in A$, para cierto $m_0 \in \{0, 1, ..., 11\}$, genera al conjunto A si todos los elementos $m\frac{\pi}{6} \in A$ pueden expresarse como múltiplos de $m_0\frac{\pi}{6}$ para un cierto número de vueltas $k \in \mathbb{Z}$. Esto es:

$$\forall \, m \in \{0, 1, ..., 11\} \, \exists n \in \{0, 1, ..., 11\} \, , k \in \mathbb{Z} \ : \ nm_0\frac{\pi}{6} + 2k\pi = m\frac{\pi}{6}.$$

Usando álgebra elemental es muy fácil comprobar que esta definición es equivalente a que

$$\forall\, m \in \{0, 1, ..., 11\}\, \exists n \in \{0, 1, ..., 11\} \ \ : \ nm_0 \equiv m \ (mod 12).$$

En otras palabras, $m_0 \frac{\pi}{6}$ es generador de A si el conjunto formado por los restos de dividir los valores nm_0, $n \in \{0, 1, ..., 11\}$ entre 12 es exactamente el conjunto $\{0, 1, ..., 11\}$.

Con esto en mente, podemos encontrar los valores de m_0 que producen generadores de A mirando la Tabla 1. Para ello, basta comprobar si en la fila correspondiente se pueden encontrar todos los valores en $\{0, 1, ..., 11\}$. Por ejemplo, se comprueba que en las filas correspondientes a $m_0 = 7$ o $m_0 = 11$ se pueden encontrar todos estos valores, mientras que en las filas correspondientes a valores de m_0 pares los restos de dividir los nm_0 entre 12 son siempre pares, por los elementos $m_0 \frac{\pi}{6}$ con m_0 par nunca pueden ser generadores de A. Tampoco produce un generador el valor $m_0 = 9$, pues el conjunto de restos correspondiente sería $\{0, 3, 6, 9\} \neq \{0, 1, ..., 11\}$.

$m_0 \downarrow, n \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabla 1: Restos obtenidos al dividir el producto de las filas (m_0) y las columnas (n) entre 12

Volviendo a la mesa, por la definición de ángulo y teniendo en cuenta que $\pi < l_1 < l_2 < 2\pi$, se pueden encontrar $\beta < \gamma$, $\beta, \gamma \in]\pi, 2\pi[$ de forma que $\beta = \frac{l_1}{R}$ y $\gamma = \frac{l_2}{R}$.

Ahora bien, tanto β como γ son ángulos que producen un reloj al considerar sus primeros 12 múltiplos enteros o, en otras palabras, ambos deben ser generadores de A. En particular, se pueden encontrar $m_0^\beta, m_0^\gamma \ : \ \beta = m_0^\beta \frac{\pi}{6}$ y $\gamma = m_0^\gamma \frac{\pi}{6}$.

Puesto que $\beta < \gamma$, se tiene que $6 \leq m_0^\beta < m_0^\gamma \leq 11$, i.e., $m_0^\beta, m_0^\gamma \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$. Además, por la discusión anterior sabemos que los $m_0 \frac{\pi}{6}$ no son generadores cuando m_0 es par ni cuando $m_0 = 9$ por lo que los únicos generadores posibles deben ser $\beta = 7\frac{\pi}{6}$ y $\gamma = 11\frac{\pi}{6}$.

Por tanto, sustituyendo en la fórmula del área, se tiene:

$$A = \pi R^2 = \frac{\pi l_1 l_2}{\beta\gamma} = \frac{36 l_1 l_2}{77\pi}$$