Retos matemáticos en la UJA – 2023

Solución al primer problema

Problema 1 (propuesto por José M. Manzano). Tenemos 42 números naturales distintos colocados en fila. Entre cada dos consecutivos se escribe un signo de suma o de multiplicación y además se pueden añadir tantos paréntesis como sea necesario sin alterar el orden de los números. Demostrar que se puede conseguir de este modo que el resultado de la operación sea múltiplo de 750141.

Solución oficial. Observemos que $750141 = 3^7 \cdot 7^3$, luego vamos a dividir los 42 números en 7 grupos de 3 y 3 grupos de 7; cada grupo se pone entre paréntesis y luego se añade un signo de multiplicación entre paréntesis consecutivos. De esta forma, el problema se reduce a ver que en cada grupo de 3 podemos conseguir un múltiplo de 3 y en cada grupo de 7 un múltiplo de 7.

- **Grupos de 3.** Si uno de los tres números es múltiplo de tres, simplemente multiplicamos los tres números. Si los tres números tienen todos resto 1 o todos resto 2 al dividirlos entre tres, sumamos los tres números. Si hay números con resto 1 y números con resto 2 mezclados, simplemente sumamos uno de cada consecutivos, los ponemos entre paréntesis y multiplicamos por el tercero.

- **Grupos de 7.** Aquí la distinción de casos se vuelve más tediosa (aunque se puede hacer), luego demostraremos de otra forma que hay una cadena consecutiva que suman un múltiplo de 7; bastará sumarla, ponerla entre paréntesis y multiplicar por el resto de números de este grupo. Pongamos que los números son $a_1, a_2, \ldots, a_7$ y vamos haciendo las sumas

  $$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$

  Si una de ellas es múltiplo de 7 habremos terminado; si no, todas dejarán resto entre 1 y 6 al dividirlas por 7. Por el principio del palomar, algún resto se repetirá, luego basta restar la suma de más términos de la suma de menos términos para obtener una subsuma de la forma $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_j$ múltiplo de 7. Por ejemplo, si $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ y $a_1 + a_2$ dejan el mismo resto al dividir por 7, entonces $a_3 + a_4 + a_5$ es múltiplo de 7. $\square$