

Retos matemáticos en la UJA – 2025

Solución al primer problema

Problema 1 (propuesto por José M. Manzano). ¿Cuántos enteros consecutivos podemos encontrar (como máximo) de forma que la suma de los dígitos de cualquiera de ellos no sea múltiplo de 13?

Solución oficial. El número máximo de enteros en esas condiciones es 78.

En primer lugar, si tenemos 79 enteros positivos consecutivos, entre los primeros 40 de ellos tiene que haber uno, llamémosle a , cuyas dos últimas cifras sean 00, 10, 20, 30, 40, 50 o 60. Sea S la suma de las cifras de a . Como los números $a, a + 1, \dots, a + 39$ están en el conjunto inicial de números y difieren de a sólo en las unidades y las decenas, las sumas de las cifras de estos cuarenta números nos dan todos los enteros entre S y $S + 12$, luego alguna de dichas sumas será múltiplo de 13.

Ahora veamos que con 78 enteros positivos consecutivos se puede conseguir que ninguna suma sea múltiplo de 13. El mismo razonamiento anterior nos dice que para ello debemos tomar los números del $100m + 61$ al $100(m + 1) + 38$ (si no, habría cuarenta consecutivos en la misma centena, el primero de ellos con último dígito cero). Además, debe cumplirse que $100m + 61$ y $100(m + 1)$ tengan ambos suma de dígitos de la forma $13k + 1$ (ya que el resto de números se obtienen de ellos sumándoles del 1 al 38 y permanecen en su misma centena). Por tanto, la suma de los dígitos de m debe ser de la forma $13k + 7$ y la suma de los dígitos de $m + 1$ de la forma $13k + 1$. La forma más sencilla de que de que ocurra esto es que m esté formado por sólo por nueves. La menor cantidad de nueves que hay que sumar para obtener un número de la forma $13k + 7$ son ocho (observamos que $9 \cdot 8 = 72 = 13 \cdot 5 + 7$, luego nos vale con $m = 99999999$). De esta forma, si tomamos los 78 números comprendidos entre 9999999961 y 10000000038, ninguno de ellos tiene suma de dígitos múltiplo de 13.

Finalmente, observemos que si se tratara de enteros negativos consecutivos, el resultado sería el mismo ya que la suma de los dígitos de n es la misma que la de $-n$. No podemos elegir simultáneamente algunos de los enteros positivos y otros negativos ya que tendríamos que incluir al cero (cuya suma de dígitos es $0 = 0 \cdot 13$ y por tanto múltiplo de 13). $\square$