Miguel Ángel García Muñoz

Solución problema número 2

Supongamos que n = ab….k es un número cuyo cuadrado es un número con todas las cifras iguales. Como las unidades de n^2 vendrán dadas por las unidades de multiplicar k consigo mismo y teniendo en cuenta que al multiplicar los números naturales de una cifra consigo mismo obtenemos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 y 81, las posibles soluciones se reducen a que el cuadrado tenga todas sus cifras iguales a las unidades de estos números, es decir, 11….1, 44….4, 55…5, 66…6 o 99….9. Distinguimos casos:

i) Si el cuadrado de n es 55…5, la última cifra de n es 5, es decir, n es múltiplo de 5 y por tanto n^2 tiene que ser múltiplo de $5^2 = 25$ y esto es imposible pues 55…5/5 = 11…1, que no es múltiplo de 5 ya que no termina en 0 ni en 5. Descartamos este caso.

ii) Si el cuadrado de n es 66…6, su última cifra es 4 o 6. En cualquier caso, n es un número par y por tanto n^2 tiene que ser divisible por $2^2 = 4$ y esto es de nuevo imposible ya que 66…6/2 = 33…3 que no es múltiplo de 2 ya que no termina en número par. Descartamos también este caso.

iii) Si el cuadrado de n es 11…1, su última cifra es 1 o 9, en cualquiera de los dos casos n es un número impar, por tanto, n – 1 es par, y también podemos razonar que en tal caso $4 = 2^2$ tiene que ser un divisor de $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 = 11…12 – 2n = 2\ (55…56 – n)$ y el número entre paréntesis es un número impar ya que es la diferencia entre un par y un impar. Por tanto, 2 divide a $(n – 1)^2$, pero 4 no es divisor de este número. Descartamos de nuevo este caso.

iv) Si el cuadrado de n es 44…4, la última cifra de n es 2 o 8 (es decir, n es un número par) y además este cuadrado es igual a 44…4 = 4(11…1) = n^2, de donde 11…1 = $(\frac{n}{2})^2$, siendo $\frac{n}{2}$ un número natural ya que n es par. Pero esto está en contradicción con lo visto en el apartado iii) ya que hemos visto que no existen números naturales cuyo cuadrado es 11…1. Este caso tampoco es posible.

v) Si el cuadrado de n es 99…9, la última cifra de n es 3 o 7 y, como 99…9 = 9 (11…1), es decir, el cuadrado es divisible por $9 = 3^2$, deducimos que n tiene que ser divisible por 3, luego $\frac{n}{3}$ es un número natural tal que:

$$99…9 = 9\ (11…1) = 9\ (\frac{n}{3})^2$$

de donde de nuevo tenemos que 11…1 = $(\frac{n}{3})^2$, y esto una vez más está en contradicción con la no existencia de un número natural cuyo cuadrado es 11…1 como hemos visto en el apartado iii).

Podemos concluir por tanto que es imposible encontrar un número natural cuyo cuadrado sea un número con todas sus cifras iguales.