Solución Segundo Reto Matemático de la UJA (Curso 2021/22):

En este reto se nos está pidiendo si existe un cuadrado mágico de orden 2021, es decir, una matriz cuadrada de orden 2021 (con 2021^2 términos) de forma que suma de los elementos de cada fila, cada columna y sus dos diagonales sumen igual siendo todos los elementos de esta matriz todos distintos y terminados en 2022. Así pues, podemos representar esta matriz como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11}10^5+2022 & a_{12}10^5+2022 & \cdots & a_{1\,2021}10^5+2022 \\ a_{21}10^5+2022 & a_{22}10^5+2022 & \cdots & a_{2\,2021}10^5+2022 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2021\,1}10^5+2022 & a_{2021\,2}10^5+2022 & \cdots & a_{2021\,2021}10^5+2022 \end{pmatrix}$$

siendo a_{ij} todos números naturales distintos.

De esta forma la suma de la fila i-esima sería:

$(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{i\,2021})\, 10^5 + 2022*2021$, para cada i desde 1 hasta 2021,

la suma de la columna j-esima sería:

$(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{2021\,j})\, 10^5 + 2022*2021$, para cada j desde 1 hasta 2021, y

las sumas de las diagonales serían:

$$(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{2021\,2021})\, 10^5 + 2022*2021$$

$$(a_{1\,2021} + a_{2\,2020} + \ldots + a_{2021\,1})\, 10^5 + 2022*2021$$

Si todas dan las sumas anteriores dan una cantidad fija K, es obvio que

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{i\,2021} = S, \text{ para cada i desde 1 hasta 2021}$$

$$a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{2021\,j} = S, \text{ para cada j desde 1 hasta 2021}$$

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{2021\,2021} = S$$

$$a_{1\,2021} + a_{2\,2020} + \ldots + a_{2021\,1} = S$$

donde S se obtiene despejando, es decir, $S = (K - 2022*2021)\, 10^{-5}$.

Por tanto, el problema se reduce a decir si es posible construir un cuadrado mágico de orden 2021. Como 2021 es un número impar y siempre es posible construir un cuadrado de orden impar, la respuesta a la pregunta formulada en este reto es **afirmativa**.

Veamos ahora un método para construir un cuadrado mágico de orden impar. Por ejemplos, utilizaremos como términos del cuadrado los primeros n^2 números naturales, es decir, 1, 2, 3,…, n^2 . Estos números constituyen una progresión aritmética y la suma de todos ellos viene dada por la fórmula: $S_{total} = \frac{1+n^2}{2} n^2$ (este valor será el resultado de sumar todas las casillas del cuadrado mágico) y como el cuadrado mágico tendrá n filas, la suma de cada fila, columna o diagonal será el resultado anterior dividido entre n:

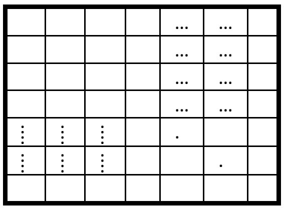
$$S = \frac{S_{total}}{n} = \frac{(1+n^2)}{2}n = \frac{n+n^3}{2}$$

En nuestro caso, como n = 2021, los números a_{ij} que rellenarán el cuadrado mágico iran desde el 1 hasta el 2021^2= 4084441

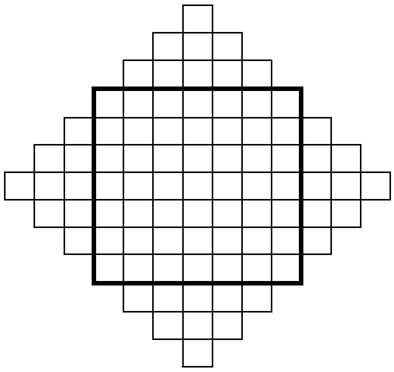
Y la suma de cada fila será:

$$S = \frac{2021+2021^3}{2} = 4127328641$$

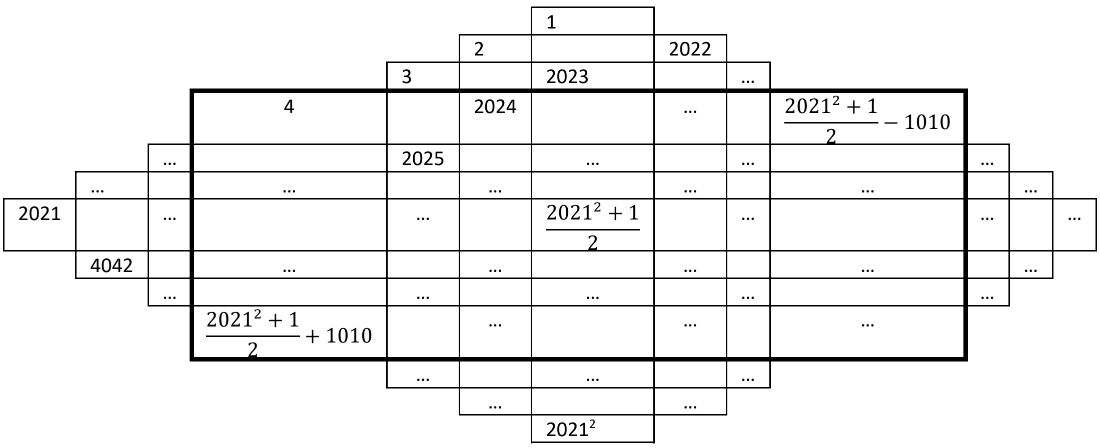
Partimos del cuadrado en blanco de 2021 filas y 2021 columnas:



Ahora formamos un rombo añadiendo arriba, abajo, a izquierda y a derecha primero 2019 casillas, después 2017,…, hasta llegar a añadir sólo 1 (lo dibujo con siete filas y siete columnas):



Lo siguiente que hacemos es rellenar las diagonales del rombo con la sucesión aritmética como se muestra en la siguiente figura (podemos observar que en el centro del cuadrado mágico aparece el término $\frac{2021^2+1}{2}$):



Finalmente, terminamos rellenando los huecos del cuadrado que quedaron en blanco de manera que los números del triángulo de arriba se insertan en la parte de abajo del cuadrado, la del triángulo de abajo en la parte de arriba del cuadrado, los del triángulo de la derecha en la parte izquierda y los del triángulo de la izquierda en la parte de la derecha del cuadrado:

4	…	2024	…	…	…	$\frac{2021^2+1}{2} - 1010$
…	2025	…	…	…	…	…
…	…	…	2021^2	…	…	…
…	…	…	$\frac{2021^2+1}{2}$	2021	…	…
…	…	…	1	…	4042	…
…	…	2	…	2022	…	…
$\frac{2021^2+1}{2} + 1010$	3	…	2023	…	…	…

Con esto probamos la existencia del cuadrado mágico de orden 2021 y multiplicando por 10^5 y sumando 2022 en cada celda obtenemos la solución del cuadrado que se pide en el reto.

Autor: Miguel Ángel García Muñoz