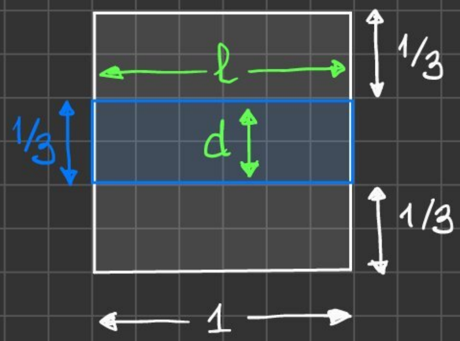
PROBLEMA: Sin usar técnicas que involucren el uso de la derivada, calcular la mínima y máxima distancia entre dos rectas paralelas que dividen al cuadrado de lado unidad en tres regiones de igual área

En primer lugar exhibimos algunos casos

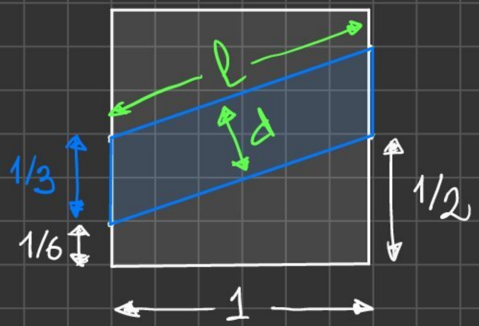
* Rectas con pendiente 0

$d = \frac{1}{3} \qquad \left(d \cdot \ell = \frac{1}{3}\ ;\ \ell = 1\right)$



* Rectas con pendiente $\frac{1}{3}$

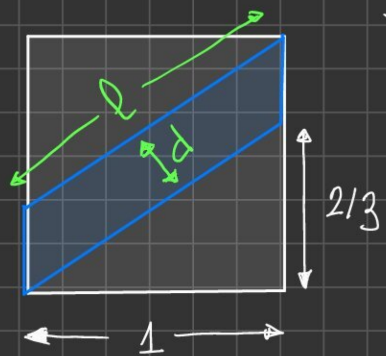
$d = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \left(d \cdot \ell = \frac{1}{3}\ ;\ \ell = \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$



Caso 1. Las rectas intersecan con el cuadrado en lados opuestos.

* Rectas con pendiente $\frac{2}{3}$

$d = \frac{1}{\sqrt{13}} \qquad \left(d \cdot \ell = \frac{1}{3}\ ;\ \ell = \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$

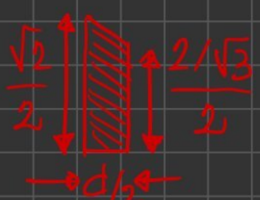


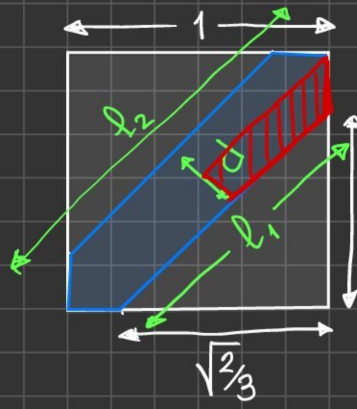
Caso Límite (1 ∩ 2)

* Rectas con pendiente 1

$d = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \left(4\,\frac{d}{2} \cdot \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \frac{1}{3}\ ;\right.$

$\left.\ell_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\ ,\ \ell_2 = \sqrt{2}\right)$





Caso 2. Las rectas intersecan en lados contiguos.

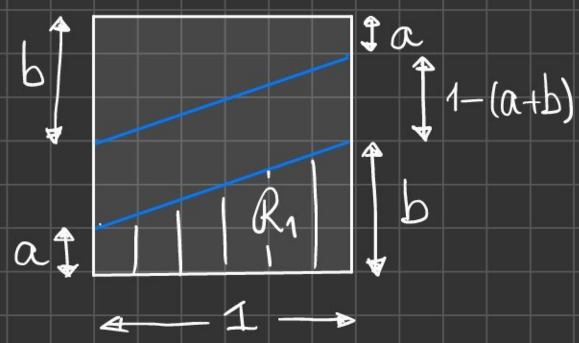
$\boxed{\text{CASO 1}}$ Las rectas paralelas intersecan al cuadrado en lados opuestos.

<u>Informalmente</u>: Como la región que delimitan las rectas paralelas en el cuadrado es un paralelogramo de área

$$A = \frac{1}{3} = d \cdot \ell,$$

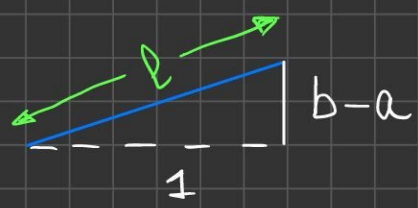
entonces d y ℓ son inversamente proporcionales, y el área mínima en este Caso 1 se obtiene cuando ℓ es máximo, y ℓ parece aumentar conforme aumenta la pendiente.

<u>Con un poco más de rigor</u>:



$$* \begin{cases} A(R_1) = 1 \cdot \dfrac{a+b}{2} \\ A(R_1) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow a+b = \frac{2}{3}$$

$(a, b \geq 0)$



$* \; 1-(a+b) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$* \; \ell = \sqrt{1^2 + (b-a)^2} = \sqrt{1+a^2+b^2-2ab}$

$* \; (a+b)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2+b^2 = \frac{4}{9} - 2ab$

$* \; \ell = \sqrt{1+\frac{4}{9}-2ab-2ab} = \sqrt{\frac{13}{9}-4ab} \Longrightarrow \ell \leq \frac{\sqrt{13}}{3}$

$*$ Como $d = \frac{1}{3\ell}$, entonces $d \geq \frac{1}{3 \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$. Además $d = \frac{1}{\sqrt{13}}$ para $a=0$ (y $b=\frac{2}{3}$)

$*$ Hemos visto que el valor mínimo para d en el Caso 1 es $d = 1/\sqrt{13}$ y se alcanza para $a=0$. (Consideramos $m>0$.)

Nota: En realidad es posible (y nada difícil) ver que la función

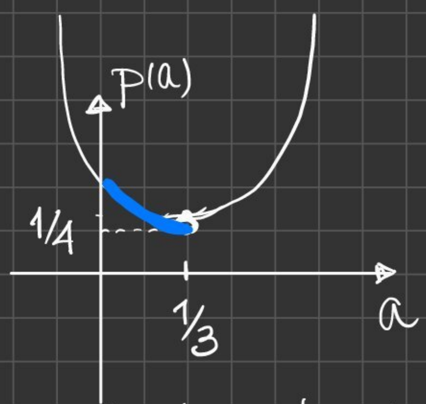
$$d: [0, \tfrac{1}{3}] \longrightarrow [\tfrac{1}{\sqrt{13}}, \tfrac{1}{3}]$$

$$a \longmapsto d(a) = \frac{1}{3\ell} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{13}{9} - 4ab}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{13}{9} - 4a(\frac{2}{3} - a)}}$$

es estrictamente decreciente. Para ello observamos que

$$d(a) = \frac{1}{\sqrt{13 - 36a(\frac{2}{3} - a)}} = \frac{1}{\sqrt{13 - 24a + 36a^2}} = \frac{1}{\sqrt{36(a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{13}{36})}} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{(a - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + \frac{13}{36}}} = \frac{1}{6\sqrt{(a - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}}}$$

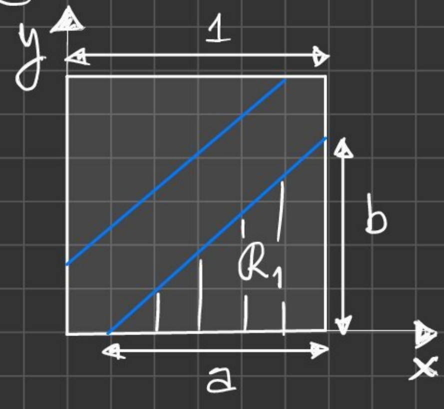


Y como $p(a) = (a - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{4}$ decrece en $(-\infty, \frac{1}{3})$ y crece en $(\frac{1}{3}, \infty)$, al ser la función "raíz cuadrada positiva" estrictamente creciente, la función $g(a) = \sqrt{p(a)}$ es estrictamente decreciente en $[0, 1/3]$, de modo que toma el valor máximo en $a = 0$ ($g(0) = \sqrt{p(0)} = \sqrt{13/36} = \sqrt{13}/6$) y toma el valor mínimo en $a = \frac{1}{3}$ ($g(\frac{1}{3}) = \sqrt{p(1/3)} = \sqrt{1/4} = 1/2$).

Lo anterior prueba que para todo $a \in (0, 1/3)$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{6 \cdot (\sqrt{13}/6)} = \frac{1}{6\,g(0)} = d(0) < d(a) < d(1/3) = \frac{1}{6\,g(1/3)} = \frac{1}{6 \cdot (1/2)} = \frac{1}{3}.$$

$\boxed{\text{CASO 2.}}$ Cada una de las dos rectas paralelas interseca al cuadrado en dos lados contiguos.



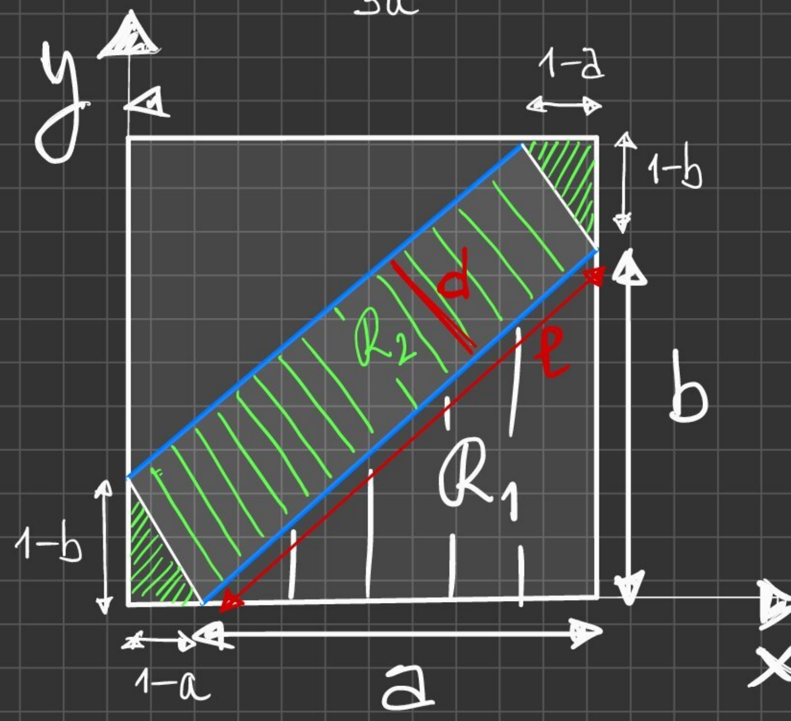
$$*\begin{cases} A(R_1)=\frac{1}{2}ab \\ A(R_1)=\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow ab=\frac{2}{3}.$$

* Como $0<a,b\leq 1$, entonces

$$a\geq ab=\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad b\geq ab=\frac{2}{3},$$

de modo que $a,b\in[\frac{2}{3},1]$ (con $b=\frac{2}{3a}$).

* Vamos a describir el área de la región R_2, que se compone de un paralelogramo de longitud ℓ y altura d, y de dos triángulos rectángulos iguales de catetos de longitudes $1-a$ y $1-b$.



$$*\begin{cases} A(R_2)=\ell\cdot d+2\cdot\frac{1}{2}(1-a)(1-b)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot d+(1-a)(1-b) \\ A(R_2)=\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot d+1-(a+b)+ab \quad (\text{y como } ab=\frac{2}{3})$$

$$\frac{1}{3}=\sqrt{a^2+b^2}\,d+\frac{5}{3}-(a+b).$$

Despejando d resulta:

$$d = \frac{(a+b) - \frac{4}{3}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(Aquí podría intentarse alguna acotación usando, por ejemplo, que $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ (la media aritmética es mayor o igual que la geométrica), o $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{2}$ (desigualdad entre medias aritmética y cuadrática), pero no parece que conduzcan resultados "provechosos".)

Usando que $b = \frac{2}{3a}$ (y $a \in [\sqrt{\frac{2}{3}}, 1]$) resulta

$$d = d(a) = \frac{a + \frac{2}{3a} - \frac{4}{3}}{\sqrt{a^2 + \frac{4}{9a^2}}}, \quad a \in [\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1],$$

y buscamos el valor mínimo (global) de $d(\cdot)$, pero sin usar técnicas que involucren el uso de la derivada. Para ello observamos que

* $d(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 0'26$
* $d(1) = \frac{1}{\sqrt{13}} \simeq 0'28$ $\qquad (d(1) = d(2/3))$
* la simetría del problema se describe cuantitativamente como $d(a) = d(\frac{2}{3a})$, de modo que la simetría destaca el punto a_0 que satisface $a_0 = \frac{2}{3a_0}$, esto es, el punto $a_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Nuestra intención es probar que es precisamente en a_0 donde la función $d(\cdot)$ toma su valor mínimo.

Consideramos la función

$$f(h)=d\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}+h\right)=\frac{\frac{\sqrt{6}+3h}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}+3h}-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{6}+3h)^2}{9}+\frac{4}{(\sqrt{6}+3h)^2}}},$$

donde $h\in\left[\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{2}{3}},\,1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. El problema queda resuelto si conseguimos probar que f tiene un mínimo gobal en $h=0$ (por tanto, d tiene mínimo global en $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+0$), y ese valor mínimo es $d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vamos a probar que $f(h)-f(0)\geq 0$, o bien

$$f(h)\geq f(0)=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

y esto equivale a

$$\left(\frac{\sqrt{6}+3h}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}+3h}-\frac{4}{3}\right)^2\geq\left(\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{(\sqrt{6}+3h)^2}{9}+\frac{4}{(\sqrt{6}+3h)^2}\right)$$

o bien, tras hacer un poco de trabajo algebraico

$$\frac{h^2\left[(72\sqrt{6}-168)+(216-84\sqrt{6})h+(36\sqrt{6}-63)h^2\right]}{(\sqrt{6}+3h)^2}\geq 0,$$

pero esta desigualdad es cierta (y se convierte en igualdad cuando $h=0$) ya que el polinomio cuadrático del numerador toma valores estrictamente positivos ya que

$36\sqrt{6}-63\simeq 25'2>0$ y

$$(216-84\sqrt{6})^2-4(36\sqrt{6}-63)(72\sqrt{6}-168)=864(7\sqrt{6}-18)<0.$$

Esto concluye la demostración.

Tenemos, por tanto: $\boxed{\frac{1}{3}\leq d\leq\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$