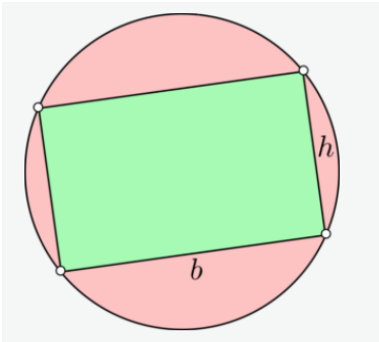
# Solución al Problema 3

**Francisco Javier Martínez Sánchez**

**Problema tres.** Sabiendo que
$$\frac{b}{h} = \frac{h}{b-h},$$
¿qué región tiene mayor área, la roja o la verde?




*Solución.* Las diagonales del rectángulo pasan por el centro de la circunferencia circunscrita en virtud de un resultado elemental de Geometría euclídea atribuido a Thales. En consecuencia, sabemos que las diagonales del rectángulo tienen una longitud de $d = \sqrt{h^2 + b^2}$ en vistas del teorema de Pitágoras. Así pues, si $r = d/2$ denota el radio de la circunferencia circunscrita, las áreas buscadas son
$$A_{verde} = A_{\text{rectángulo}} = bh,$$
$$A_{rojo} = A_{\text{círculo}} - A_{verde} = \pi r^2 - bh = \pi \frac{h^2 + b^2}{4} - bh.$$
Finalmente, denotando por $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ al número de oro[1] y teniendo en cuenta que
$$\frac{b}{h} = \frac{h}{b-h} \Leftrightarrow b^2 - hb - h^2 = 0 \overset{b>0}{\Leftrightarrow} b = \frac{h + \sqrt{5h^2}}{2} = \Phi h \Rightarrow \begin{cases} bh = \Phi h^2 \\ b^2 + h^2 = (\Phi^2 + 1)h^2 = (\Phi + 2)h^2 \end{cases}$$
se concluye
$$A_{verde} - A_{rojo} = 2bh - \pi \frac{h^2 + b^2}{4} = 2\Phi h^2 - \frac{\pi}{4}(\Phi + 2)h^2 = \underbrace{\left(2\Phi - \frac{\pi}{4}(\Phi + 2)\right)}_{\approx 0.39447} h^2 > \frac{h^2}{3} > 0.$$

**Solución.** El área de la región verde es mayor que el área de la región roja.

*NOTA 1.* En general, en un rectángulo cualquiera (de base $b$ y altura $h$) inscrito en una circunferencia de radio $r$ y siendo $A_{verde}$ el área del rectángulo y $A_{rojo}$ la diferencia entre el área

[1] Solución positiva de la ecuación $x^2 = x + 1$.

del círculo y del rectángulo, siempre se da la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} A_{verde} - A_{rojo} &= 2bh - \pi\frac{h^2+b^2}{4} \leq (b^2+h^2) - \pi\frac{h^2+b^2}{4} = \\ &= \left(1-\tfrac{\pi}{4}\right)(h^2+b^2) = \left(1-\tfrac{\pi}{4}\right)(2r)^2 = (4-\pi)r^2 \quad (*) \end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad $2xy \leq x^2 + y^2$ que se demuestra sin mas que desarrollar el binomio $0 \leq (x-y)^2$. Obsérvese que se da la igualdad en $(*)$ si, y sólo si, $b = h$ o, en otras palabras, si el rectángulo es, en realidad, un cuadrado.

*NOTA 2.* En el caso general, se cumple que $A_{verde} < A_{rojo}$ si, y sólo si,

$$\frac{8}{\pi} < \frac{b^2+h^2}{bh}.$$

Fijado $h > 0$, un estudio básico de la función $f_h(x) = \frac{x^2+h^2}{xh}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ dice que $f_h$ es decreciente en $(0,h)$ (nótese que $f_h'(x) = 1 - \frac{h^2}{x^2}$) y tiene un mínimo en $x = h$ que vale $f_h(h) = 2$. Como $2 < 8/\pi$, esto significa que existen parejas de bases $b$ y alturas $h$ para las que se cumple la desigualdad contraria ($A_{verde} < A_{rojo}$) de la que se satisface en el rectángulo áureo. Evidentemente, el caso $b = \Phi h$ no cae dentro de este escenario. De hecho, si $b = \Phi h$, entonces

$$\frac{b^2+h^2}{bh} = \frac{\Phi^2h^2+h^2}{\Phi h^2} = \frac{\Phi^2+1}{\Phi} \approx 2.236 < 2.546... = \frac{8}{\pi}.$$

$\square$