<u>**SOLUCIÓN RETOS MATEMÁTICOS UJA:** Problema 3</u>

Autor: José Jiménez Caballero

Puesto que solo tenemos disponibles las teclas $\sqrt{}$, 2, $\times$, $=$, solo podemos combinar potencias de 2. Probamos algunos casos sencillos como, por ejemplo:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \cdots = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}$$

que converge a 2, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$

Otra posibilidad sería, por ejemplo:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt{2 \times 2}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2 \times 2 \times 2}}} \times \cdots = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}}$$

que converge a 4, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2$ (calculado con Wolfram Alpha: https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/calculus-and-analysis/sums).

A través de estas pruebas, observamos que basta encontrar una sucesión de exponentes tal que la suma de sus elementos tienda a $\frac{1}{3}$. Las sumas más sencillas corresponden a progresiones geométricas, por lo que empezaremos probando con estas. Llamamos a_1 al primer término y r a la razón de la progresión. Entonces, la suma de los términos de la progresión tiene límite si, y solo si, $r < 1$ y dicho límite es $\frac{a_1}{1-r}$.

Para que

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{3}$$

tiene que ser $r = 1 - 3a_1$ y para que r sea mayor que 0 y menor que 1, debe ser

$$0 < a_1 < 1/3.$$

El primer valor que podemos conseguir en ese rango es $1/4$ ($\sqrt{\sqrt{}}$). Probamos con $a_1 = 1/4$ y calculamos la razón:

$$\frac{1/4}{1-r} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$$

Por tanto, una posible sucesión de exponentes cuya suma tiende a $\frac{1}{3}$ sería $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \cdots$ o, equivalentemente,

$$\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^6}, \cdots$$

En consecuencia,

$$2^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}}$$

tiende a $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$, que es justo lo que buscamos.

Además, esta sucesión de exponentes se puede obtener con nuestras teclas, ya que son todos múltiplos de $1/2$.

Concretamente, la secuencia de teclas que debemos usar para aproximarnos al valor de $\sqrt[3]{2}$ tanto como queramos es:

$$\underbrace{\sqrt{}\sqrt{}}_{2\text{ veces}}\ 2 \times \underbrace{\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}}_{4\text{ veces}}\ 2 \times \underbrace{\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}}_{6\text{ veces}}\,2 \times \underbrace{\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}}_{8\text{ veces}}\,2 \times \cdots \times \underbrace{\sqrt{}\sqrt{}\cdots\sqrt{}}_{2n\text{ veces}}\,2 \times \cdots =$$