Retos matemáticos en la UJA – 2023

Solución al tercer problema

Problema 3 (propuesto por José M. Manzano). En una pizarra hay escritos cuatro números reales (a, b, c, d). Debajo de ellos, escribimos los números $(a - b, b - c, c - d, d - a)$ y borramos los originales. Observamos que, sin importar el número de veces que se repita este proceso, nunca obtenemos un número mayor que 2023. ¿Cuáles son los posibles valores de los números inciales a, b, c, d?

Solución oficial. Definimos de forma recursiva la sucesión

$$\begin{aligned}(a_0, b_0, c_0, d_0) &= (a, b, c, d),\\ (a_n, b_n, c_n, d_n) &= (a_{n-1} - b_{n-1}, b_{n-1} - c_{n+1}, c_{n-1} - d_{n-1}, d_{n-1} - a_{n-1}),\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. El problema equivale a comprobar bajo qué condiciones alguno de los números a_n, b_n, c_n, d_n se pasa de 2023 para algún valor del subíndice n en términos de los valores iniciales. La idea feliz es encontrar la siguiente fórmula válida para todo $n \geq 1$:

$$(a_n - c_n)(b_n - d_n) = \begin{cases} (-4)^{\frac{n-1}{2}}[(a-c)^2 - (b-d)^2] & \text{si } n \text{ es impar,}\\ (-4)^{\frac{n}{2}}[(a-c)(b-d)] & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

La probaremos por inducción sobre n. Los casos base son $n = 1$ y $n = 2$, que se comprueban fácilmente. Para $n \geq 3$, se tiene (tras sucesivas simplificaciones) el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}(a_n - c_n)(b_n - d_n) &= (a_{n-1} - b_{n-1} - c_{n-1} + d_{n-1})(b_{n-1} - c_{n-1} - d_{n-1} + a_{n-1})\\ &= (-2b_{n-1} + 2d_{n-1})(-2c_{n-1} + 2a_{n-1})\\ &= -4(a_{n-1} - c_{n-1})(b_{n-1} - d_{n-1}).\end{aligned}$$

Por tanto, por cada dos unidades que avanza el subíndice, aparece un nuevo factor -4, lo que se corresponde con la fórmula arriba propuesta (teniendo en cuenta el caso base y la hipótesis de inducción), que queda así probada.

Ahora bien, si $a \neq c$ o bien $b \neq d$, se tiene que $(a-c)(b-d) \neq 0$ o bien $(a-c)^2 - (b-d)^2 \neq 0$, luego necesariamente que $(a_n - c_n)(b_n - d_n)$ se vuelve positivo y arbitrariamente grande en algún momento al ir multiplicado por un factor $(-4)^{n/2}$ o $(-4)^{(n-1)/2}$ (da igual si $(a-c)(b-d)$ o $(a-c)^2 - (b-d)^2$ son positivos o negativos porque la potencia tiene base negativa y va tomando alternadamente valores positivos y negativos); en particular, en algún momento tenemos que pasarnos de 2023.

Finalmente, analizamos qué pasa cuando $a = c$ y $b = d$. No es difícil ver entonces que $a_n = 2^{n-1}(a - b)$ y $b_n = 2^{n-1}(b - a)$ también por inducción sobre n y dejamos los detalles como ejercicio. Por lo tanto, si $a \neq b$, entonces a_n o b_n se hará mayor que 2023 en algún momento ya que 2^{n-1} se volverá arbitrariamente grande (de nuevo, no importa si $a > b$ o $b > a$). Con todo esto, deducimos que la única forma de no sobrepasar 2023 es que $a = b = c = d < 2023$, en cuyo caso tenemos obviamente que $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para todo $n \geq 1$. $\square$