Retos matemáticos en la UJA – 2024

Solución al tercer problema

Problema 3 (propuesto por Fco. Javier Martínez). Sean n y k números enteros tales que $1 \leq k \leq n$. Determinar, en función de n y k, la parte entera de

$$S = \sqrt{n^2 - k} + \ldots + \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 + 1} + \ldots + \sqrt{n^2 + k},$$

es decir, S es la suma de las raíces cuadradas de los enteros comprendidos entre $n^2 - k$ y $n^2 + k$.

Nota. la parte entera de S es el mayor entero menor o igual que S . Como S es positivo, estamos hablando del número entero que resulta al eliminar sus decimales.

Solución oficial. La parte entera de S es $2kn + n - 1$.

Si emparejamos la primera raíz con la última, la segunda con la penúltima y así sucesivamente, obtenemos sumas que podemos acotar de la siguiente manera (ver la nota):

$$\sqrt{n^2 - j} + \sqrt{n^2 + j} = \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4 - j^2}} < \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4}} = 2n.$$

Por lo tanto sumando desde $j = 1$ hasta $j = k$ y añadiendo el sumando $\sqrt{n^2} = n$, obtenemos que $S < 2kn + n$. Ahora bien, si demostramos que $S \geq 2kn + n - 1$, habremos terminado y la solución será efectivamente $2kn + n - 1$.

Para ver esto, seguimos el razonamiento anterior del emparejamiento, pero en este caso hacemos la siguiente estimación para $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2 - j} + \sqrt{n^2 + j} &= \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4 - j^2}} \geq \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4 - k^2}} \\
&\geq \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4 - n^2}} \geq \sqrt{2n^2 + 2\sqrt{n^4 - 2n^2 + 1}} \\
&= \sqrt{2n^2 + 2(n^2 - 1)} = \sqrt{4n^2 - 2} = 2n\sqrt{1 - \tfrac{1}{2n^2}}.
\end{aligned}$$

Sumando de nuevo en j, obtenemos $S \geq n + 2kn\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}$ Por lo tanto, para demostrar que $S \geq n + 2kn - 1$ (que es lo que queremos), será suficiente ver que $2kn\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}} \geq 2kn - 1$. Esto equivale a que

$$2kn\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{1}{2n^2}}\right) \leq 1.$$

El peor caso posible es $k = n$, luego es suficiente probar que $2n^2(1-\sqrt{1-\frac{1}{2n^2}}) \leq 1$, que a su vez puede escribirse como

$$1 - \frac{1}{2n^2} \leq \sqrt{1 - \tfrac{1}{2n^2}}.$$

Esta última desigualdad es obvia: como $1-\frac{1}{2n^2}$ es un número entre 0 y 1, su raíz cuadrada es mayor. Siguiendo la cadena de desigualdades equivalentes, hemos probado el resultado. $\square$