Problemas y soluciones

1. *Encuentra todas las soluciones del sistema de ecuaciones*

$$ad = b + c$$
$$bc = a + d$$

donde a, b, c, d *son enteros positivos tales que* $a < b < c < d$.

Solución. De las desigualdades proporcionadas, es claro que $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$ y $d \geq 4$. Inspeccionando el sistema, parece lógico estudiar la diferencia $a + d - (b + c)$. Distinguiremos dos casos:

Caso 1: $a + d \geq b + c$
Entonces será $a + d \geq ad$ y por lo tanto $a(d-1) \leq d$, es decir, $a \leq 1 + \frac{1}{d-1} < 2$. Por lo tanto $a = 1$ y $b + c = ad = d = a + d - 1 = bc - 1$, de donde $b = 1 + \frac{2}{c-1}$. Como $c \geq 3$, b sólo puede ser entero si $c = 3$ y en tal caso $b = 2$ y $d = bc - a = 5$. Esto produce la solución $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 5)$.

Caso 2: $a + d < b + c$
Entonces será $b + c > bc$ y por lo tanto $b(c-1) < c$, es decir, $b < 1 + \frac{1}{c-1} < 2$. Pero esto es imposible ya que $b \geq 2$.

2. *En un tablero de ajedrez de tamaño* $n \times n$ *se escribe* 1 *o* -1 *en cada una de sus casillas. Sea* a_k *el producto de todos los números de la fila* k*, y sea* b_m *el producto de todos los números de la columna* m*. Si* $n = 2019$*, ¿Se pueden colocar los números de manera que la suma*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

sea cero? ¿Y si $n = 2020$*?*

Solución. Si $n = 2020$ se puede poner -1 en cada casilla de la primera fila, y 1 en todas las demás casillas. Entonces todos los a_k serán iguales a 1, y todos los b_k serán iguales a -1. Por tanto, la suma descrita será:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2020} = 2020 - 2020 = 0.$$

Veamos entonces el caso $n = 2019$. Los números a_k y b_m son iguales a 1 o a -1. Sea s el número de a_k que son iguales a -1. Entonces, contando los positivos por un lado y los negativos por otro, se tiene:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = (2019 - s) - s = 2019 - 2s.$$

Del mismo modo, sea t el número de b_m que son iguales a -1. Se tiene:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = (2019 - t) - t = 2019 - 2t.$$

Si la suma que consideramos fuera igual a cero, tendríamos:

$$0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = 2019 - 2s + 2019 - 2t.$$

Por tanto, tendríamos $s + t = 2019$.
Por otra parte, el valor de a_k es 1 si en la fila k hay un número par de casillas con -1. Y el valor de a_k es -1 si en la fila k hay un número impar de casillas con -1. Por tanto, si s es par, hay un número par de -1 en el tablero, y si s es impar, hay un número impar de -1 en el tablero. Siguiendo el mismo razonamiento, si t es par, hay un número par de -1 en el tablero, y si t es impar, hay un número impar de -1 en el tablero. Por tanto, la paridad de s es la misma que la de t, y eso implica que $s + t$ es par. Es imposible entonces que tengamos $s + t = 2019$. Luego es imposible colocar los números en el tablero de forma que

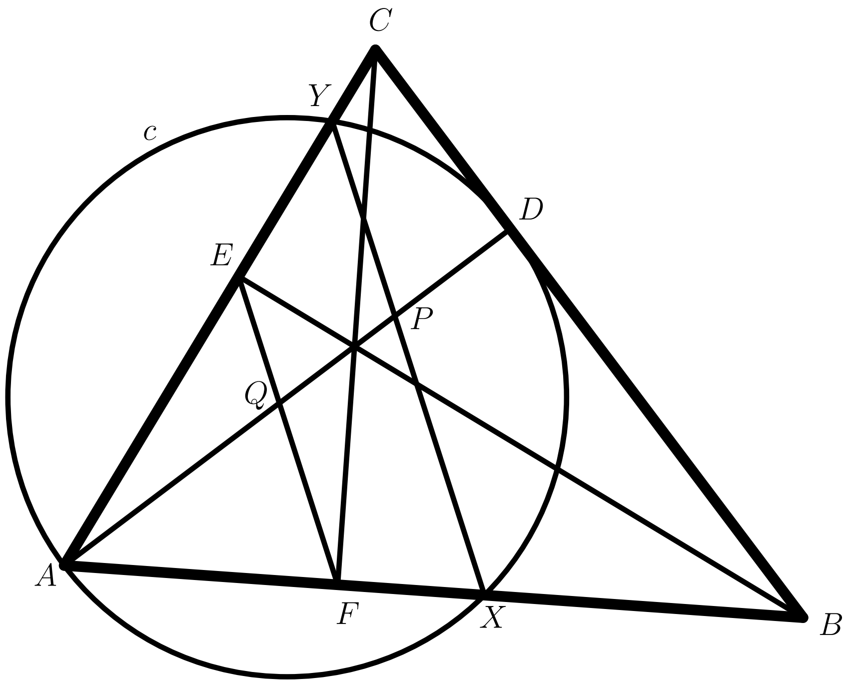
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = 0.$$

3. *Sea ABC un triángulo acutángulo, D, E, F los pies de las alturas de A, B y C, respectivamente. Sean:*

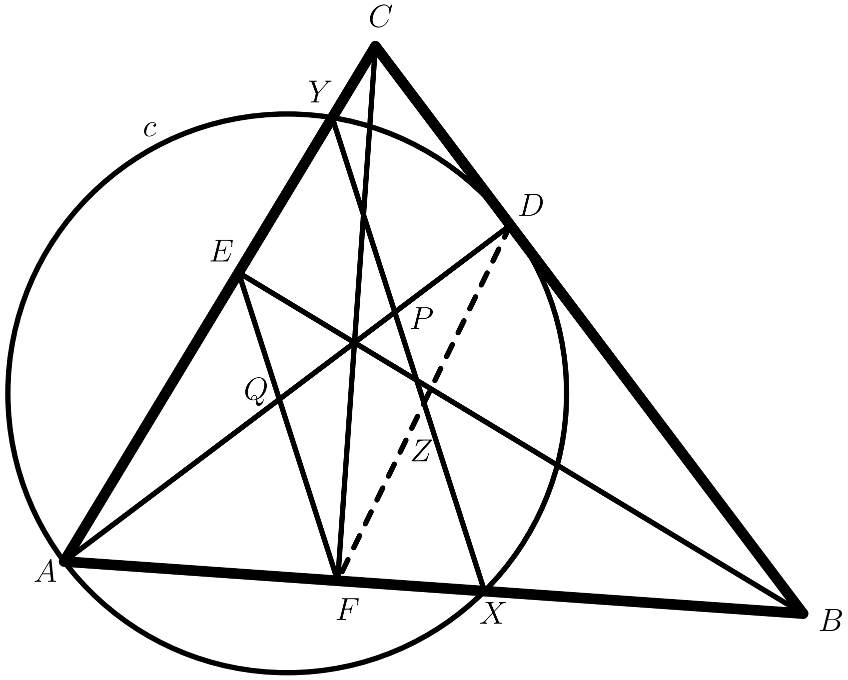
1. *O es el punto medio del segmento AD,*
2. *c la circunferencia de centro O que pasa por A y D,*
3. *X e Y las intersecciones de c con AB y AC, respectivamente.*
4. *P la intersección de XY con AD, y Q la intersección de AD y EF.*

Prueba que P es el punto medio del segmento QD.

Solución. Tenemos la siguiente situación:



Primero observamos que $\angle AFE = \angle ACB$, y lo mismo ocurre con $\angle BFD = \angle ACB$. El triángulo AYD es rectángulo, y como $\angle BEC$ es recto, se tiene que BE es paralelo a YD. De forma similar, como el triángulo AXD es rectángulo, se tiene que DX es paralelo a CF.
Trazamos FD, y llamamos Z al punto de intersección de los segmentos DF y XY.



Como AXD es un triángulo rectángulo, y $\angle AXY = \angle AFE$, por ser EF y XY paralelos, se tiene $\angle FXZ = \angle AXY = \angle AFE = \angle ACB = \angle BFD = \angle XFZ$. Por lo tanto FXZ es un triángulo isósceles, y también lo es el triángulo XDZ. Por tanto Z es el punto medio del segmento FD.
Consideramos ahora los triángulos DQF y DPZ, que son semejantes, ya que EF y XY son paralelos, por tanto P es el punto medio del segmento QD.

4. *Sean k, m y n enteros naturales tales que $k + m + 1$ sea un número primo estrictamente superior a $n+1$. Se designa por C_s al entero $s(s+1)$. Demostrar que el producto $(C_{m+1} - C_k) \cdot (C_{m+2} - C_k) \cdots (C_{m+n} - C_k)$ es divisible por el producto $C_1 C_2 \cdots C_n$.*

Solución. Dado que $C_a - C_b = a(a+1) - b(b+1) = a^2 + a - b^2 - b = (a-b)(a+b+1)$, entonces

$$(C_{m+1} - C_k) \cdot (C_{m+2} - C_k) \cdots (C_{m+n} - C_k)$$

$$= (m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)(m+2+k+1) \cdots (m+n-k)(m+n+k+1)$$

$$= \big[(m+1-k)(m+2-k) \cdots (m+n-k)\big] \cdot \big[(m+1+k+1)(m+2+k+1) \cdots (m+n+k+1)\big] = P_1 \cdot P_2$$

siendo $P_1 = (m+1-k)(m+2-k) \cdots (m+n-k)$ y $P_2 = (m+1+k+1)(m+2+k+1) \cdots (m+n+k+1)$.

Ahora vamos a ver que P_1 es divisible por $n!$ y que P_2 es divisible por $(n+1)!$. En efecto, __**Estudiemos P_1:**__

- Sea $k < m$, entonces $P_1 = (m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n) = \dfrac{(m-k+n)!}{(m-k)!}$ con lo que
$$\frac{P_1}{n!} = \frac{(m-k+n)!}{n!(m-k)!} = \binom{m-k+n}{m-k}$$
es un número entero y por tanto P_1 es divisible por $n!$.

- Sea $k = m$, entonces $P_1 = n!$ y por tanto divisible por $n!$.

- Sea $m+1 \leq k \leq m+n$, entonces $P_1 = (m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n) = 0$ de donde resulta $P_1P_2 = 0$ que es divisible por cualquier entero.

- Sea $k > m+n$, entonces todos los factores de P_1 son negativos. Se tiene que
$$|P_1| = (k-m-1)(k-m-2)\cdots(k-m-n)$$
$$= \frac{(k-m-1)\cdots(k-m-n)(k-m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(k-m-n-1)!} = \frac{(k-m-1)!}{(k-m-n-1)!}$$
de donde resulta
$$\frac{|P_1|}{n!} = \frac{(k-m-1)!}{n!(k-m-n-1)!} = \binom{k-m-1}{k-m-n-1}$$
que es un número entero y por tanto $|P_1|$ es divisible por $n!$.

- Si $k = m+n+1$, entonces $|P_1| = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ con lo que $|P_1|$ es divisible por $n!$.

De lo anterior se concluye que P_1 es divisible por $n!$ en todos los casos.

__**Estudiemos P_2:**__

Dado que
$$P_2 = (m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$$
$$= \frac{(m+k+n+1)(m+k+n)\cdots(m+k+2)(m+k+1)!}{(m+k+1)!} = \frac{(m+k+n+1)!}{(m+k+1)!},$$
entonces
$$\frac{P_2}{(n+1)!} = \frac{(m+k+n+1)!}{(n+1)!(m+k+1)!} = \frac{\binom{m+k+n+1}{n+1}}{m+k+1}$$
donde el numerador es un número entero y el denominador es por hipótesis un número primo mayor que $n+1$ y que está contenido en el numerador. Por tanto, P_2 es divisible por $(n+1)!$.

De lo anterior se concluye que $P_1 \cdot P_2$ es divisible por $n!(n+1)!$. Por otro lado, se tiene que $C_1C_2\cdots C_n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1) = n!(n+1)!$, que divide a
$$P_1P_2 = (C_{m+1}-C_k)\cdot(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$
tal y como se quería demostrar.