III Olimpiada Matemática de Andalucía

20 de marzo de 2021

Problemas

1. Sean $x, y \geq 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Solución 1. Observemos en primer lugar que $xy \leq 1$, dado que de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene que

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1.$$

Por tanto $0 \leq xy \leq 1$. Por comodidad, llamemos $p = xy$. Entonces, la desigualdad a probar se corresponde a

$$p^2((x+y)^2 - 2p) = p^2(4 - 2p) = 2p^2(2 - p) \leq 2,$$

o lo que es lo mismo

$$p \cdot (p(2 - p)) \leq 1.$$

Ahora bien, aplicando nuevamente la deisguladad entre las medias aritmética y geométrica,

$$p(2 - p) \leq \left(\frac{p + (2 - p)}{2}\right)^2 = 1.$$

Por tanto,

$$p \cdot (p(2 - p)) \leq 1 \cdot 1 = 1,$$

tal y como queríamos demostrar. La igualdad se alcanza para $x = y = 1$.

Solución 2. Observa que x e y son raíces del polinomio $X^2 - (x + y)X + xy = X^2 - 2X + xy$. Las raíces de este polinomio tienen la siguiente expresión:

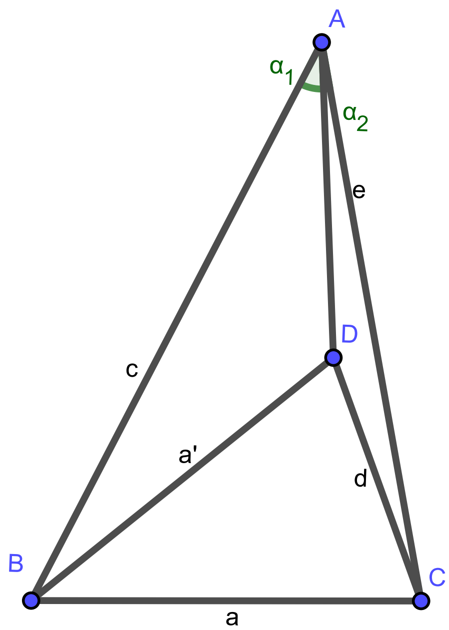
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4xy}}{2},$$

y para que sean reales, tiene que ser $4 - 4xy \geq 0$, esto es, $xy \leq 1$.
Por otro lado, si $x + y = 2$, se tiene $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$, entonces se verifica:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) = x^2y^2(4 - 2xy) \leq 4 - 2 = 2.$$

La igualdad se cumple cuando $x = y = 1$.

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(2018)p(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.



Solución. Observemos que tanto $p(2018)$ como $p(2019)$ deben ser impares (porque su producto es impar). Y como hecho general, si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces $p(a) \equiv p(b) \pmod{m}$ (pues $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, $ka^2 \equiv kb^2 \pmod{m}$ para cualquier k entero, etc). Por tanto si a es par, entonces $a \equiv 2018 \pmod{2}$, entonces $p(a) \equiv p(2018) \pmod{2}$ y así $p(a)$ es impar. Y si a es impar, entonces $a \equiv 2019 \pmod{2}$, entonces $p(a) \equiv p(2019) \pmod{2}$ y de nuevo $p(a)$ es impar. Por tanto $p(a)$ es impar para todo a entero, y es imposible en particular que $p(a)$ sea 2020.

3. Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 80^o$. Sea D un punto interior al triángulo, tal que $\widehat{DBC} = 40^o$ y $\widehat{BCD} = 70^o$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

Solución 1. El triángulo BDC es isósceles por tener dos ángulos iguales, de 70^o, luego $BD = BC$. Sea M el punto medio de CD, y E el pie de la perpendicular desde D a AB. El triángulo rectángulo BDE tiene ángulos de 70^o y 20^o , luego los triángulos BDE, BDM y BMC son iguales (tienen los mismos ángulos y comparten un lado). Sea $A' \in AB$ tal que $\widehat{A'DE} = 60^o$. Entonces$A'D = 2DE = DC$, luego el triángulo $A'DC$ es isósceles, por lo que $\widehat{CA'D} = \widehat{A'CD}$. Además $\widehat{A'DC} = 360 - 70 - 70 - 60 = 160^o$, por lo que $A' \in AC$, luego $A' = A$.
En consecuencia $\widehat{BAD} = 30^o$, por lo que AD es perpendicular a BC.

Solución 2: Llamamos α_1, α_2 a los ángulos en que la recta AD divide al ángulo $\hat{A}$. Aplico el teorema del seno en los triángulos BCD, ABD ACD y se tiene

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin 40^o}{\sin 70^o}$$
$$\frac{a}{e} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin 20^o}$$
$$\frac{e}{d} = \frac{\sin 10^o}{\sin(40^o - \alpha_1)}$$

Multiplicando queda:

$$\sin\alpha_1 \sin 10^{\text{o}} \sin 40^{\text{o}} = \sin(40^{\text{o}} - \alpha_1)\sin 20^{\text{o}} \sin 70^{\text{o}}$$

Considerando $\sin 70^{\text{o}} = \cos 20^{\text{o}}$ y $\sin 40^{\text{o}} = 2\sin 20^{\text{o}}\cos 20^{\text{o}}$ queda:

$$2\sin\alpha_1 \sin 10^{\text{o}} = \sin(40^{\text{o}} - \alpha_1) = \sin 40^{\text{o}}\cos\alpha_1 - \cos 40^{\text{o}}\sin\alpha_1$$

de donde se deduce que

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sin 40}{2\sin 10 + \cos 40}$$

usando las funciones trigonométricas de 40 como suma de 30 y 10, se obtiene fácilmente que $\tan\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto $\alpha_1 = 30^{\text{o}}$, por lo que AD es perpendicular a BC.

4. Dos jugadores A y B compiten en el siguiente juego. Se establece un número entero de puntos $N_0 \geq 2$, elegido al azar. El jugador A resta de ese número inicial R_1 puntos, a su elección, con la condición de que $1 \leq R_1 \leq \frac{N_0}{2}$. Por tanto, $N_1 = N_0 - R_1$ es la cantidad de puntos restantes. El jugador B retira R_2 puntos, a su elección, de esa cantidad N_1 restante con la similar condición de que $1 \leq R_2 \leq \frac{N_1}{2}$. Se continúa así alternadamente hasta que uno de los jugadores deja un único punto, en cuyo caso pierde la partida y la gana el jugador contrario.
Justifique cuándo existe una estrategia ganadora para cada jugador. Si N_0 recorre todos los valores entre 2 y 2^{2021} y ambos jugadores siguen su estrategia ganadora, deduzca en cuántos casos ganará cada uno.

Solución. Pierde el jugador que deja un punto, por tanto gana el jugador que deja 2 puntos. En consecuencia, pierde el que deja 3 o 4 puntos, gana el que deja 5, pierde el que deja 6,7,8,9,10, gana el que deja 11... De aquí se conjetura que la sucesión recurrente $S = \{x_n\}$ definida por $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, para $n \geq 1$, es la sucesión de puntuaciones ganadoras. Lo probamos por inducción. Para $n = 1$ es cierto. Supongamos que dejar x_n puntos es una opción ganadora; por tanto, dejar $x_n + 1, x_n + 2, \ldots, 2x_n$ son obviamente opciones perdedoras, porque la jugada del otro jugador consitiría en retirar $1, 2, \ldots, x_n$ respectivamente y las dejaría en x_n; mientras que dejar $2x_n + 1$ es una opción ganadora, puesto que sea cual sea la opción de retirar R puntos del otro jugador, $1 \leq R \leq \frac{2x_n+1}{2} = x_n + \frac{1}{2}$, cambiando de signo las desigualdades y sumando en todas $2x_n + 1$ se obtiene $x_n < x_n + 1/2 \leq 2x_n + 1 - R \leq 2x_n$, lo que implica que retirar R puntos es siempre una opción perdedora, luego dejar $2x_n + 1$ es una opción ganadora.
Calculamos esta sucesión S obteniendo su término general:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 = 2(2x_{n-1} + 1) + 1 = 2^2 x_{n-1} + 2 + 1 = 2^2(2x_{n-2} + 1) + 2 + 1 = \ldots$$

$$= 2^n x_1 + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{n+1} + 2^n - 1 = 3 \times 2^n - 1$$

Se comprueba que $x_{n+1} = 3 \times 2^n - 1$ verifica la condición de recurrencia.
En suma, la estrategia ganadora será dejar al jugador contrario alguno de los miembros de la sucesión S. Por tanto si el dato inicial N_0 es uno de los elementos de S, B tiene una estrategia ganadora que consiste en ir dejando a A los sucesivos elementos de S. Concretamente, si $N_0 = x_m$, para $m > 1$, entonces sea cual sea la elección R_1 de A, como $R_1 \leq \frac{2x_{m-1}+1}{2}$, se deduce que $R_1 \leq x_{m-1}$, luego A deja

$N_1 = N_0 - R_1 = x_m - R_1 \geq x_m - x_{m-1} = x_{m-1} + 1$. El jugador B retiraría $R_2 = N_1 - x_{m-1}$ puntos y dejaría x_{m-1} a A.
En caso contrario, si el dato inicial N_0 no es uno de los elementos de S, A tiene una estrategia ganadora que consiste en ir dejando a B los sucesivos elementos de S. Esto es posible porque S es una sucesión creciente de enteros, luego no acotada, por lo que existe un m tal que $x_m < N_0 < x_{m+1}$. En este caso, la elección de A es $R_1 = N_0 - x_m \geq 1$, que cumple $R_1 \leq \frac{N_0}{2}$, que es equivalente a $N_0 \leq 2x_m$, o bien $N_0 < x_{m+1}$. Así A deja $N_0 - R_1 = x_m$ puntos a B.
Queda calcular cuántos elementos de S hay en el conjunto de enteros entre 2 y 2^{2021}. Para ello, comprobamos que $x_{2020} = 3 \times 2^{2019} - 1 < 3 \times 2^{2019} < 2^{2021}$. Además, $x_{2021} = 3 \times 2^{2020} - 1 = 2^{2021} + 2^{2020} - 1 > 2^{2021}$. Por tanto hay 2020 elementos de S en el intervalo citado, que correspondería a los casos en que B ganaría, mientras en los restantes casos ganaría el jugador A.