V Olimpíada Matemática de Andalucía

Granada–Sevilla, 18 de febrero de 2023

Problemas

1. Tenemos piezas cuadradas de tamaño 1×1 en las que podemos pintar cada borde de un color A, B, C, D, no repitiéndose colores en cada pieza.
Formamos un rectángulo $n \times m$ pegando piezas cuadradas con la condición de que los bordes que se pegan son del mismo color.
¿Para qué números n y m es esto posible si en cada lado del rectángulo los bordes de las piezas que lo forman son del mismo color, y en los cuatro lados del rectángulo aparecen los cuatro colores?

2. Determina todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p+q+r = 2023$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.

3. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y que una función* f *es creciente cuando* $f(m) \leq f(n)$ *si* $m < n$.

4. Encuentra todos los números naturales $n \geq 3$ para los que es posible rellenar un polígono regular de n lados con al menos dos polígonos regulares sin solapamientos (los polígonos del recubrimiento pueden tener distinto número de lados).