1.- *Calcular el área de un triángulo ABC sabiendo que el ángulo B es recto, que* $\widehat{C}$ *= 54º y el lado AC* = 4.

SOLUCIÓN

Como $\widehat{B}$ es recto y $\widehat{C}$ = 54º, entonces $\hat{A}$=36º

Prolongando el lado *AB,* se considera el punto *N* tal que *AN = AC* resultando que el triángulo *ANC* es isósceles y *AN = 4*.

Sea *AB = x*, entonces *BN = 4 - x.* En el triángulo *ANC,* se tiene que $\widehat{N}$ = $\widehat{C}$ = $\frac{180º-36º}{2}$ = 72º.

Considero en el lado *AB* el punto M tal que *BN = BM* y observando los triángulos *CBM* y *CBN,* se tiene que el lado *CB* es común, $\widehat{CNB}$ = $\widehat{CMB}$ = 72º y *CM = CN.*

Como $\widehat{CMB}$ =72º, entonces $\widehat{CMA}$ = 180º - 72º = 108º. Se concluye que *AM=MC=CN=2x – 4.*

Resulta que los triángulos *ANC* y *CNM* son semejantes, con lo que $\frac{4}{2x-4}$ = $\frac{2x-4}{8-2x}$ $\Rightarrow$ x = 1+$\sqrt{5}$.

Como *AB*=1+$\sqrt{5}$, entonces *BC* = $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

SΔ*ABC* = $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

P. Encontrar todos los números enteros positivos $n < 1000$ tales que las cuatro últimas cifras de n^2 pueden reordenarse para formar el número 2024.

Solución. Observamos que n^2 es par (ya que su cifra de las unidades tiene que ser 0, 2 o 4), luego es múltiplo de 4. Esto nos dice que las dos últimas cifras de n^2 deben formar un múltiplo de 4, luego estas solo pueden ser 04, 20, 24 o 40, de las cuales podemos descartar 20 y 40 (ya que n^2 sería múltiplo de 5 pero no de 25). De aquí, obtenemos que las cuatro últimas cifras de n^2 solo pueden ser 2204, 0224 o 2024. Podemos descartar 2024 (ya que en tal caso n^2 es múltiplo de 8 pero no de 16). Para ver qué ocurre con 2204 y 0224, pongamos $n = 100a + 10b + c$, con $0 \leq a, b, c \leq 9$ respectivamente, luego

$$n^2 = (100a + 10b + c)^2 = 10000a + 2000ab + 100(2ac + b^2) + 20bc + c^2.$$

Trabajamos ahora esta ecuación módulo 10 para obtener c, luego módulo 100 para obtener b y finalmente módulo 1000 para obtener a. Distingamos los dos casos que tenemos:

1. Si las últimas cifras de n^2 son 2204, entonces $c^2 \equiv 4 \pmod{10}$, que tiene soluciones $c = 2$ y $c = 8$.

   - Si $c = 2$, la cifra de las decenas nos dice que $2b \equiv 0 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 0$ y $b = 5$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 2 pero no de 4, tiene que ser $b = 0$, entonces nos queda $4a \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 3$ y $a = 8$. Sin embargo, $302^2 = 91204$ y $802^2 = 643204$ no tienen por últimas cifras 2204.
   - Si $c = 8$, la cifra de las decenas nos dice que $6b \equiv 4 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 4$ y $b = 9$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 2 pero no de 4, tiene que ser $b = 9$, en cuyo caso las centenas nos dicen que $6a \equiv 6 \pmod{10}$. Esta congruencia tiene soluciones $a = 1$ y $a = 6$. Sin embargo, ni $198^2 = 39204$ ni $698^2 = 487204$ tienen por últimas cifras 2204.

2. Si las últimas cifras de n^2 son 0224, luego en las unidades tenemos que $c^2 \equiv 4 \pmod{10}$, con soluciones $c = 2$ y $c = 8$ (igual que en el caso 1).

   - Si $c = 2$, entonces en las decenas tenemos que $6b \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 3$ y $b = 8$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 4, tiene que ser $b = 3$, luego las centenas cuadran cuando $4a \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 3$ y $a = 8$. Tenemos que $332^2 = 110224$ sí cumple la condición pero $832^2 = 692224$ no.
   - Si $c = 8$, entonces $6b \equiv 6 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 1$ y $b = 6$. Para que $10b + c$ sea múltiplo de 4, tiene que ser $b = 6$. Cuandrando las centenas, tenemos que $6a \equiv 6 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 1$ y $a = 6$. Sin embargo, las unidades de millar de $168^2 = 28224$ ni $668^2 = 446224$ no cuadran.

Hemos probado así que $n = 332$ es la única solución al problema. $\square$

Observación. La discusión de casos se puede hacer sin necesidad de congruencias mediante la multiplicación en caja cuadrando desde la cifra de las unidades a la de las centenas (no se han escrito las llevadas ya que dependen de los valores concretos de a, b, c):

$$\begin{array}{ccccc} & & a & b & c \\ & \times & a & b & c \\ \hline & & ac & bc & c^2 \\ & ab & b^2 & bc & \\ a^2 & ab & ac & & \\ \hline a^2 & 2ab & b^2+2ac & 2bc & c^2 \end{array}$$

Problema 3. Sea n un número natural. En un tablero infinito se coloca en cada casilla una moneda, cada moneda tiene dos estados; cara o cruz. Inicialmente todas las monedas se encuentran en cruz. Un movimiento consiste en voltear las n^2 monedas de un cuadrado $n \times n$. Determinar en función de n el número de caras que pueden quedar tras efectuar un número finito de movimientos.

Solución. Si n es par solo pueden quedar los pares mayores que 2.

Si n es impar solo pueden quedar los pares mayores que 2 hasta n^2 y todos los números mayor o igual que n^2.

Demostración.

Si volteamos los cuadrados de vértices opuestos

$$\{(0,0),(n-1,n-1)\},\{(0,1),(n-1,n)\},\{(1,0),(n,n-1)\},\{(1,1),(n,n)\}$$

se quedan exactamente 4 caras en el tablero, en las posiciones $(0,0),(0,n),(n,0),(n,n)$.

Este patrón de voltear 4 monedas se puede repetir en cualquier parte del tablero.

En general, dado un tablero con k monedas en cara, podemos considerar la moneda en cara C en la casilla (x,y) que se encuentra más arriba (y de las que están más arriba la que está más a la derecha) y aplicar el patrón en esa casilla. La moneda C pasará de cara a cruz y se voltearán las monedas $(x+n-1,y)$, $(x,y+n-1)$, $(x+n-1,y+n-1)$ de cruz a cara, resultando en $k+2$ monedas en cara.

Esto demuestra que los números pares mayores que 2 siempre se pueden construir y si n es impar entonces los pares e impares mayor o igual que n^2 también, es decir, todos los números pares mayor que 2 hasta n^2 y todos los números mayor o igual que n^2.

Si n es par y volteamos un cuadrado $n \times n$ con k monedas en cara, el número de caras aumenta o desciende en $n^2 - 2k$ unidades. Como $n^2 - 2k$ es par y la suma de números pares es par, en el tablero siempre habrá un número par de monedas en estado cara.

Supongamos n impar y que en el tablero se pueden quedar s caras, con s número impar menor que n^2.

A cada casilla (i,j) le asociamos el número entero $i + nj$ módulo n^2. Si nos fijamos en la primera fila de un cuadrado $n \times n$ veremos que los números asociados son consecutivos módulo n^2, el número asociado a la primera casilla de la siguiente fila es consecutivo al de la última casilla de la anterior fila y, nuevamente, en la siguiente fila todos los números son consecutivos. De esto se deduce que todos los residuos módulo n^2 aparecen exactamente una vez en cualquier cuadrado.

Por el principio del palomar, como $s < n^2$ existe un residuo r en el que ninguna moneda es cara. Consideremos el tablero perforado como el mismo tablero sin las casillas con residuo r y con las mismas reglas que en el tablero normal. En este tablero todo cuadrado voltea $n^2 - 1$ casillas, que es un número par. Por un argumento análogo al anterior solo pueden quedar un número par de monedas en cara, lo que contradice que s sea impar.

Solo falta ver que si $n \neq 1$ no es posible dejar 2 monedas en cara.

Podemos considerar que el número de veces que ha sido volteado un cuadrado es 0 o 1, pues voltear dos veces es equivalente a no hacer nada.

Dada una fila con al menos una moneda en cara se puede demostrar que entonces existen al menos dos monedas en cara pues, en caso contrario, los cuadrados que hayan sido volteado más a la izquierda y a la derecha que afecten a esa fila tendrían que coincidir, y de $n > 1$ se tiene que hay al menos dos monedas en cara.

Se puede aplicar un razonamiento análogo a las columnas.

Por tanto, dado un tablero con una moneda en cara, en la fila y columna que pasa por esa moneda existe otra moneda en cara, es decir, existen al menos tres monedas en cara.

Problem 2. Let a, b, c be positive numbers such that $a+b+c = abc$. Prove that

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}}(c+a)^{\frac{1}{ca}}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leq 2.$$

Solution. Rearranging terms and after raising to abc, the inequality claimed can be written as

$$\Big(a+b\Big)^c\Big(b+c\Big)^a\Big(c+a\Big)^b \leq \left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)^{abc} = \left(\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}\right)^{abc}$$

Dividing by abc both members of the given condition, we have

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = 1$$

Setting $q_1 = 1/ab, q_2 = 1/bc, q_3 = 1/ca$ and $x_1 = a+b, x_2 = b+c, x_3 = c+a$ into Jensen's inequality, namely,

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + q_3f(x_3)$$

with $f(t) = \ln t$, we obtain

$$\ln\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}\right) \geq \frac{1}{ab}\ln(a+b) + \frac{1}{bc}\ln(b+c) + \frac{1}{ca}\ln(c+a)$$

$$= \ln(a+b)^{\frac{1}{ab}} + \ln(b+c)^{\frac{1}{bc}} + \ln(c+a)^{\frac{1}{ca}} = \ln\Big[(a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}} + (c+a)^{\frac{1}{ca}}\Big]$$

taking into account that $f(t) = \ln t$ is injective, we get

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca} \geq (a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}} + (c+a)^{\frac{1}{ca}}$$

from which the claimed follows. Notice that equality holds when $a = b = c = \sqrt{3}$, and we are done.