Jaén, 22 de febrero de 2025

Problema 1. Halla todas las raíces reales de la ecuación

$$9x^4 - 24x^3 - 23x^2 + 58x + 26 = 0,$$

sabiendo que son cuatro números reales distintos y que dos de ellos suman 2.

Problema 2. Determina cuántos triángulos rectángulos de lados enteros tienen inscrito un círculo de radio 2025.

Nota. Si los lados de un triángulo tienen las mismas longitudes que los lados de otro triángulo (es decir, son congruentes), se considerarán iguales.

Problema 3. Tras una fiera batalla, los piratas Barbablanca y Barbaverde han obtenido un botín de 2025 monedas de oro, todas ellas de igual valor. Como buenos piratas, tanto Barbablanca como Barbaverde son muy codiciosos y quieren sacar la mayor cantidad de monedas posible (y saben que el otro hará lo mismo). A la hora del reparto, deciden seguir estos pasos:

1. Barbablanca divide las monedas en dos montones, con al menos dos monedas en cada uno de ellos.
2. Barbaverde elige un entero $n \geq 2$ a su conveniencia y divide cada uno de los dos montones en n montones, con la única condición de que todos ellos tengan al menos una moneda.
3. Por turnos, cada pirata elige uno de los $2n$ montones resultantes y se lo queda para sí.

Determina cuántas monedas se llevará cada pirata en el reparto si se sabe desde el principio que en el paso 3 comienza eligiendo Barbablanca y cuántas se llevarán si, por el contrario, se sabe desde el principio que comienza eligiendo Barbaverde.

Problema 4. En un triángulo ABC, se eligen un punto X en el lado AB y otro punto Y en el lado AC alineados con el baricentro G del triángulo. Halla el menor número real k que verifica la desigualdad

$$BX \cdot CY \leq k \cdot AX \cdot AY,$$

para cualesquiera X e Y en las condiciones dadas.

Tiempo: 4 horas.
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.