Olimpiada Matemática Española RSME

Olimpiada Matemática Andaluza

VII Olimpiada Matemática Andaluza
Jaén, 22 de febrero de 2025

Problema 1. Halla todas las raíces reales de la ecuación

$$9x^4 - 24x^3 - 23x^2 + 58x + 26 = 0,$$

sabiendo que son cuatro números reales distintos y que dos de ellos suman 2.

Proof. Denotemos las raíces por x_1, x_2, x_3, x_4 de forma que $x_1 + x_2 = 2$. Entonces

$$9x^4 - 24x^3 - 23x^2 + 58x + 26 = 9(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Comparando los coeficientes de las correspondientes potencias de x, obtenemos las conocidas relaciones de Vièta:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8/3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= -23/9, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -58/9, \\ x_1x_2x_3x_4 &= 26/9. \end{aligned}$$

Dado que $x_1 + x_2 = 2$, se sigue de la primera ecuación que $x_3 + x_4 = 2/3$. Reescribimos las ecuaciones segunda y tercera en la forma

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 &= -23/9, \\ (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 &= -58/9. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_1 + x_2 = 2$ y $x_3 + x_4 = 2/3$, llegamos a

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_3x_4 &= -35/9, \\ x_1x_2 + 3x_3x_4 &= -87/9. \end{aligned}$$

De aquí despejamos $x_1x_2 = -1$ y $x_3x_4 = -26/9$. Observemos que $x_1x_2x_3x_4 = 26/9$ y consideremos dos casos:

- Caso 1: $x_1 + x_2 = 2$ y $x_1x_2 = -1$, de donde obtenemos la ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$ con raíces: $1 \pm \sqrt{2}$.

- Caso 2: $x_3 + x_4 = 2/3$ y $x_3x_4 = -26/9$ de donde obtenemos la ecuación cuadrática $9x^2 - 6x - 26 = 0$ con raíces: $1/3 \pm \sqrt{3}$.

Por lo tanto, las cuatro raíces de la ecuación dada son:

$$1-\sqrt{2}, \quad 1+\sqrt{2}, \quad \frac{1}{3}-\sqrt{3}, \quad \frac{1}{3}+\sqrt{3}.$$

□

Problema 2. Determina cuántos triángulos rectángulos de lados enteros tienen inscrito un círculo de radio 2025.

Nota. Si los lados de un triángulo tienen las mismas longitudes que los lados de otro triángulo (es decir, son congruentes), se considerarán iguales.

Proof. Sea ABC un triángulo como el descrito, con C su ángulo recto. Si llamamos a y b a las distancias desde los puntos de tangencia a A y B respectivamente: la hipotenusa es $a+b$ y los catetos $a+2025$ y $b+2025$. Por tanto $(a+b)^2 = (a+2025)^2+(b+2025)^2$. Desarrollando y simplificando esta expresión algebraica, obtenemos $ab = (a+b)2025+2025^2$. Así

$$(a-2025)(b-2025) = ab-(a+b)2025+2025^2 = 2\cdot 2025^2 = 2\cdot 3^8\cdot 5^4 =: m.$$

Hay $2\cdot 9\cdot 5 = 90$ divisores de m, y cada uno da una solución al sistema $a = d+2025$; $b = m/d+2025$. Cada triángulo lo estoy contando exactamente dos veces, luego puedo formar 45 triángulos en esas condiciones (salvo congruencia). □

Problema 3. Tras una fiera batalla, los piratas Barbablanca y Barbaverde han obtenido un botín de 2025 monedas de oro, todas ellas de igual valor. Como buenos piratas, tanto Barbablanca como Barbaverde son muy codiciosos y quieren sacar la mayor cantidad de monedas posible (y saben que el otro hará lo mismo). A la hora del reparto, deciden seguir estos pasos:

1. Barbablanca divide las monedas en dos montones, con al menos dos monedas en cada uno de ellos.
2. Barbaverde elige un entero $n\geq 2$ a su conveniencia y divide cada uno de los dos montones en n montones, con la única condición de que todos ellos tengan al menos una moneda.
3. Por turnos, cada pirata elige uno de los $2n$ montones resultantes y se lo queda para sí.

Determina cuántas monedas se llevará cada pirata en el reparto si se sabe desde el principio que en el paso 3 comienza eligiendo Barbablanca y cuántas se llevarán si, por el contrario, se sabe desde el principio que comienza eligiendo Barbaverde.

Proof. Comencemos con el caso en que Barbablanca elige montón primero, luego Barbablanca se lleva más monedas que Barbaverde (como 2025 es impar, ambos no pueden llevarse el mismo número), luego la situación óptima para Barbaverde es que Barbablanca se lleve 1013 monedas y él las otras 1012. Esto lo puede conseguir siempre tomando $n = 2$ en el paso 2 puesto que, si Barbablanca en el paso 1 divide en montones de x y $2025-x$, siendo x par y $2025-x$ impar,

entonces Barbaverde divide el montón de x en dos montones iguales de $\frac{x}{2}$ y $\frac{x}{2}$ y $2025-x$ en dos montones de $\lfloor\frac{2025-x}{2}\rfloor$ y $\lfloor\frac{2025-x}{2}\rfloor+1$.
Supongamos ahora que comienza eligiendo Barbaverde en el paso 3, que Barbablanca ha dividido en dos montones x, y con $x>y$ en el paso 1 y que Barbaverde ha decidido dividir en n montones en el paso 2. Ordenamos los $2n$ montones como

$$v_1 \geq b_1 \geq v_2 \geq b_2 \geq \ldots \geq v_n \geq b_n,$$

donde los montones $v_1, \ldots, v_n$ se los lleva Barbaverde y los montones $b_1, \ldots, b_n$ Barbablanca. Barbaverde debe intentar maximizar con su división la diferencia

$$\begin{aligned}\Delta &= (v_1+\ldots+v_n)-(b_1+\ldots+b_n)\\ &= v_1+(v_2-b_1)+(v_3-b_2)+\ldots+(v_n-b_{n-1})-b_n \leq v_1-b_n,\end{aligned}$$

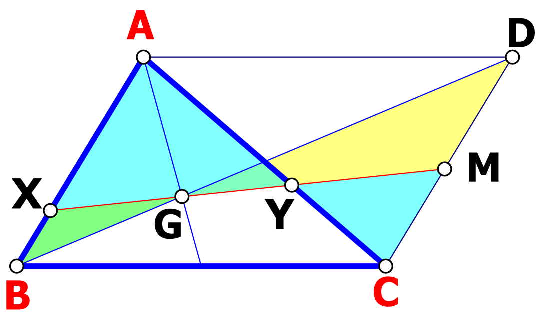
donde la desigualdad viene de que cada paréntesis es menor o igual que 0. El montón v_1 es el más grande de todos y tendrá como mucho $x-1$ monedas, mientras que el montón b_n es el más pequeño y tendrá como poco 1 moneda. Para conseguir estos valores óptimos, Barbaverde debe elegir $n=2$ y dividir el montón más grande en dos montones de $v_1=x-1$ y $b_2=1$, si bien el montón pequeño y debe poder dividirse en dos partes iguales $b_1=v_2=\frac{y}{2}$. Por lo tanto, si el montón pequeño tiene un número impar de monedas, la igualdad no se puede alcanzar, pero en tal caso podemos obtener una unidad menos si Barbaverde divide en dos trozos con $v_2=b_1-1$. Deducimos así que Barbaverde obtiene una diferencia máxima $\Delta=x-2$ si x es impar y $\Delta=x-3$ si x es par. Barbablanca, sabiendo la codicia de Barbaverde, debe elegir x para minimizar esta cantidad, pero como $x \geq 2013$ (x es el más grande de los dos montones), esto nos lleva a que su elección óptima es tanto $x=1013$ (caso impar) como $x=1014$ (caso par) y que en ambos casos consigue $\Delta=1011$, la cual nos lleva a que Barbablanca obtiene 507 monedas y Barbaverde 1518. $\square$

Problema 4. En un triángulo ABC, se eligen un punto X en el lado AB y otro punto Y en el lado AC alineados con el baricentro G del triángulo. Halla el menor número real k que verifica la desigualdad

$$BX \cdot CY \leq k \cdot AX \cdot AY,$$

para cualesquiera X e Y en las condiciones dadas.

Proof. Observamos en la figura que $\angle XGB = \angle MGD$ y $\angle XBG = \angle MDG$.



Entonces, $\triangle GXB \sim \triangle GMD$ y tenemos que

$$\frac{GB}{XB} = \frac{GD}{MD} \Leftrightarrow \frac{XB}{MD} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}.$$

Sin perder generalidad, podemos asumir que $AB = 1$. Si denotamos $XB = x$ y $XA = 1 - x$, entonces de lo anterior deducimos que $MD = 2x$ y $MC = 1 - 2x$ y

$$\frac{XB}{XA} = \frac{x}{1-x}.$$

Del mismo modo, $\triangle XYA \sim \triangle MYC$ y obtenemos que

$$\frac{XA}{YA} = \frac{MC}{YC} \Leftrightarrow \frac{YC}{YA} = \frac{MC}{XA} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\frac{XB}{XA} \cdot \frac{YC}{YA} = \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2}.$$

Dado que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica aplicada a los números no negativos x y $1-2x$ nos dice que $\sqrt{x(1-2x)} \leq \frac{1}{2}(1-x)$, luego $\frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \leq \frac{1}{4}$. La igualdad se cumple si y sólo si $x = 1 - 2x$, es decir, cuando $x = \frac{1}{3}$. Tenemos, por lo tanto, que $k = \frac{1}{4}$ es una constante que cumple la desigualdad y que es la óptima ya que se alcanza la igualdad en caso de que $XB = MC = \frac{1}{3}$, es decir, cuando $XY \| BC$. $\square$