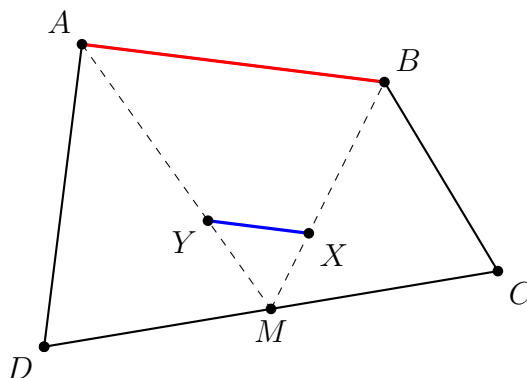


Olimpiada
Matemática
Andaluza

VIII Olimpiada Matemática Andaluza
Granada y Sevilla, 20 de febrero de 2026

Problema 1. En un cuadrilátero $ABCD$, se consideran los baricentros X, Y, Z, W de los triángulos BCD, CDA, DAB, ABC , respectivamente. Si el cuadrilátero $ABCD$ tiene área 1, calcula el área del cuadrilátero $XYZW$.

Solución 1. Sea M el punto medio del lado CD . El punto X está sobre la mediana BM del triángulo BDC y el punto Y está sobre la mediana AM del triángulo CDA . Además, por ser los baricentros, sabemos que $AY = 2 \cdot YM$ y $BX = 2 \cdot XM$, con lo que los triángulos AMB e YMX son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. Como están en posición de Thales, se deduce que el segmento XY es paralelo a AB y tiene longitud $\frac{1}{3}$ de la longitud de AB . Repitiendo este mismo argumento, tenemos que YZ, ZW, WX son paralelos a los lados BC, CD, DA , respectivamente, y tienen $\frac{1}{3}$ de la longitud de dichos lados. Por lo tanto, los cuadriláteros $ABCD$ y $XYZW$ son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ y de aquí deducimos que el área de $XYZW$ es $\frac{1}{9}$.



Solución 2 (usando vectores). Trabajando en coordenadas cartesianas, los baricentros vienen dados por

$$X = \frac{B+C+D}{3}, \quad Y = \frac{C+D+A}{3}, \quad Z = \frac{D+A+B}{3}, \quad W = \frac{A+B+C}{3},$$

de donde deducimos que

$$\overrightarrow{XY} = Y - X = \frac{C+D+A}{3} - \frac{B+C+D}{3} = \frac{A-B}{3} = \frac{-1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

De forma similar, tenemos que

$$\overrightarrow{YZ} = \frac{-1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{ZW} = \frac{-1}{3} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{WX} = \frac{-1}{3} \cdot \overrightarrow{DA}.$$

Esto nos dice que los lados de $XYZW$ son paralelos a los de $ABCD$ y están en razón $\frac{1}{3}$ a los de este, luego ambos cuadriláteros son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. Por lo tanto, el área de $XYZW$ es $\frac{1}{9}$.

Problema 2. Sean $x_1, x_2, \dots, x_{2026} \geq 0$ números reales tales que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2026} = 2026.$$

Encuentra los valores máximo y mínimo que puede tomar la expresión

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{2026}}.$$

Solución. Usando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica aplicada a los números $1+x_1, 1+x_2, \dots, 1+x_n$, obtenemos que

$$\frac{2026}{\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{2026}}} \leq \frac{(1+x_1) + (1+x_2) + \dots + (1+x_{2026})}{2026} = 2,$$

de donde deducimos que

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{2026}} \geq \frac{2026}{2} = 1013.$$

La igualdad se alcanza cuando todos los números son iguales, luego el mínimo de la expresión es 1013. Nota: la desigualdad anterior también puede obtenerse usando la de Cauchy-Schwarz o la de Jensen aplicada a la función convexa $f(t) = \frac{1}{1+t}$.

Veamos ahora que el máximo se alcanza cuando todos los números son cero salvo uno. En efecto, si hay dos números que son distintos de 0, pongamos que $x_i, x_j > 0$, entonces

$$\frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_j} = \frac{2+x_i+x_j}{1+x_i+x_j+x_ix_j} > \frac{2+x_i+x_j}{1+x_i+x_j} = \frac{1}{1+x_i+x_j} + \frac{1}{1+0}.$$

Esto nos dice que podemos cambiar x_i por x_i+x_j y x_j por 0 para obtener una suma mayor (manteniendo la suma de los 2026 números). Podemos repetir este proceso para hacer que todos los números sean 0 salvo uno de ellos, que debe ser igual a 2026. Por lo tanto, el máximo nos lo da la desigualdad

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{2026}} \leq \frac{1}{1+0} + \dots + \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+2026} = 2025 + \frac{1}{2027}. \quad \square$$

Problema 3. Halla todos los enteros positivos a y b tales que

$$(a+3b)(b+3a)$$

es una potencia de 2.

Solución. Evidentemente, $a+3b$ y $b+3a$ deben ser potencias de 2, luego el problema se reduce al sistema lineal

$$\begin{cases} a+3b = 2^n, \\ b+3a = 2^m. \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y podemos despejar fácilmente

$$a = 3 \cdot 2^{m-3} - 2^{n-3}, \quad b = 3 \cdot 2^{n-3} - 2^{m-3}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m \geq n$. Puesto que b es positivo, tenemos que $3 \cdot 2^{n-3} > 2^{m-3}$, luego $3 > 2^{m-n}$. Como $m - n \geq 0$, esto nos deja únicamente las posibilidades $m - n = 0$ y $m - n = 1$. Distingamos estos casos:

- Si $m - n = 0$, entonces tenemos que $a = b = 3 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-3} = 2^{n-2}$. Por lo tanto, obtenemos las soluciones $(a, b) = (2^k, 2^k)$ para todo $k \geq 0$.
- Si $m - n = 1$, entonces $a = 3 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-3} = 5 \cdot 2^{n-3}$ mientras que $b = 3 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2} = 2^{n-3}$. Esto nos da las soluciones $(a, b) = (5 \cdot 2^k, 2^k)$ para todo $k \geq 0$ y, por simetría, también las soluciones $(a, b) = (2^k, 5 \cdot 2^k)$ para todo $k \geq 0$.

Problema 4. Creamos una sucesión de enteros positivos empezando en 1 y realizando en cada paso una de las siguientes tres operaciones:

- a) Sumar uno.
- b) Restar uno (si el número es mayor que uno).
- c) Multiplicar por dos.

Determina el menor número de pasos necesarios para obtener 2026.

Solución. Consideremos una sucesión de operaciones de longitud minimal que nos lleve a 2026. Podemos suponer que la primera operación es c . Además, podemos suponer que no hay dos operaciones de tipos a, b seguidas después de una c , ya que $caa = ac$, $cab = cba = c$ y $cbb = bc$.

Por tanto, podemos separar nuestra sucesión de operaciones en bloques de la forma $cc \cdots ca$, $cc \cdots cb$ y $cc \cdots c$ (este último bloque solo al final). Los dos primeros bloques dan como resultado un número impar, así que la longitud del último bloque $cc \cdots c$ debe ser igual a la mayor potencia de 2 que divida a 2026, que es 1.

El problema se reduce entonces a obtener 1013 a partir de bloques de la forma $cc \cdots ca$ y $cc \cdots cb$. Llamemos *tamaño* de un bloque al número de operaciones c que contiene. Dado que $bca = cb$ y $caca = accb$, podemos suponer que no hay bloques de tipo a de tamaño 1, excepto posiblemente el primero.

Trabajando en base 2, vemos que un aplicar bloque de tipo a de tamaño n a un número impar añade $00 \cdots 01$ ($n - 1$ ceros), y aplicar un bloque de tipo b de tamaño n sustituye el último 1 por $011 \cdots 1$ (n unos). Como 1013 es 1111110101 en base 2, vemos que el último bloque aplicado debe ser cb (y entonces el número anterior sería 111111011) o cca (y entonces el número anterior sería 11111101). A su vez, para llegar a 111111011 el último bloque aplicado debe ser ccb (es la única forma de obtener dos unos consecutivos), y el número anterior es 1111111, que solo se puede obtener mediante $cccccccb$ (ya que hemos descartado los bloques de tipo a de tamaño 1). Por otro lado, a 11111101 se puede llegar desde 1111111 mediante cb , o desde 111111 mediante cca . En todos los casos vemos que se necesitan 13 operaciones para obtener 1013, y por tanto 14 para 2026.